Elaborazione dei Segnali
(Informatica musicale – F3X)

Alcuni esercizi di autovalutazione

Soluzioni

1 Segnali e sistemi tempo-continui

1.1

Soluzione

Le frequenze 0 Hz, 0.5 Hz e 1 Hz corrispondono ai coefficienti c_n con $n = 0, 1, 2$.

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 5t\,dt = 0; \qquad c_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 5t\,e^{-i\pi t}\,dt = -\frac{5}{\pi}j; \qquad c_2 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 5t\,e^{-i2\,\pi t}\,dt = \frac{5}{2\,\pi}j;$$

(Suggerimento: gli integrali relativi a c_1 e c_2 si risolvono semplicemente per parti)

1.2

Soluzione

Dato che: $\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}(t)\} = \mathrm{rect}(f)$,

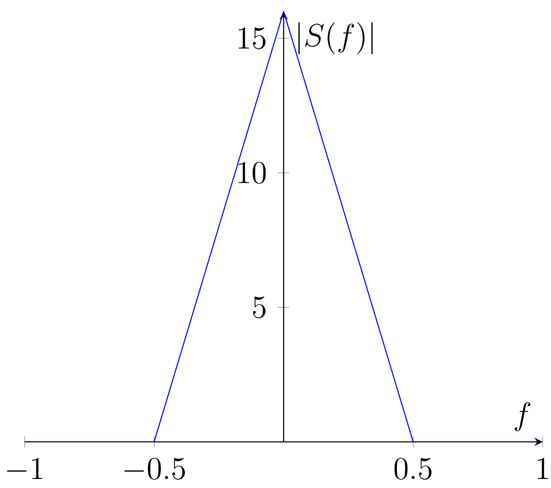
$\longrightarrow\ \mathcal{F}\left\{\mathrm{sinc}^2(t)\right\} = \mathrm{rect}(f) * \mathrm{rect}(f) = \mathrm{tri}(f)$

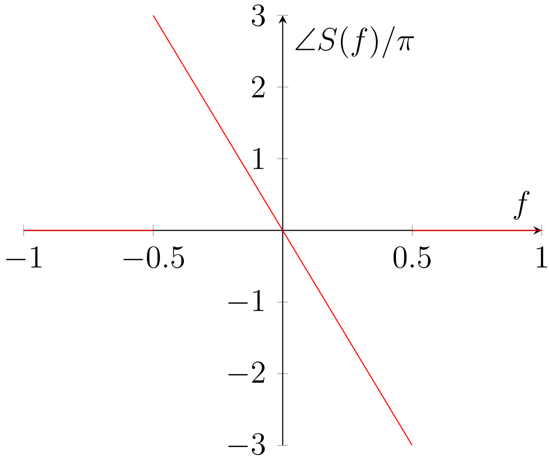
$\longrightarrow\ \mathcal{F}\left\{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right\} = 2\ \mathrm{tri}(2f)$

$\longrightarrow\ \mathcal{F}\left\{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{t-3}{2}\right)\right\} = 2\ \mathrm{tri}(2f)\,e^{-j6\pi f}$

$\longrightarrow\ S(f) = \mathcal{F}\left\{8\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t-3}{2}\right)\right\} = 16\ \mathrm{tri}(2f)\,e^{-j6\pi f}$

- Modulo: $|S(f)| = 16\ \mathrm{tri}(2f)$
- Fase: $\angle\, S(f) = -6\pi f \quad$ (per: $-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$)





1.3

Soluzione

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{j}{2}\left[\delta(f+8)-\delta(f-8)\right] \; * \; \frac{1}{4}\left[\delta(f+8)+2\delta(f)+\delta(f-8)\right] \\ &= \frac{j}{8}\left[\delta(f+16)+2\delta(f+8)-2\delta(f-8)-\delta(f-16)\right] \\ y(t) &= \frac{1}{2}\sin(16\pi\, t) \end{aligned}$$

1.4

Soluzione

- $S(f) = 2\delta(f) + \frac{1}{4j}\left[\delta(f-20)-\delta(f-40)-\delta(f+20)+\delta(f+40)\right]$
- $Y(f) = 2\delta(f) + \frac{1}{4j}\left[\delta(f-20)-\delta(f+20)\right] \quad \Rightarrow \quad y(t) = 2 - \frac{1}{2}\sin(40\pi\, t)$

1.5

Soluzione

$s(t) = 50\,\mathrm{sinc}(20\,t)$

2 Campionamento e quantizzazione

2.1

Soluzione

In uscita dal filtro di ricostruzione ideale si ha:

$$s(t) = 4 + 2\cos(20\pi\, t) + 3\cos(80\pi\, t)$$

2.2

Soluzione

a) $T = 4\,\mathrm{s}$; $\quad N = 192$ campioni.

b) Il segnale $s(t)$, campionato a $48\,\mathrm{Hz}$, appare come un impulso ideale di ampiezza 12. Pertanto la sua DFT sarà costante per tutti i valori di k. Calcolando quindi il coefficiente più semplice della DFT: $DFT[0] = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) = 12$.

Di conseguenza: $\quad DFT(24) = DFT(\forall k \in [0, N-1]) = 12 \;; \qquad \phi = \dfrac{1}{8} \;; \qquad f = 6\,\mathrm{Hz}$

3 Segnali tempo-discreti

3.1

Soluzione

$$H(z) = \frac{1}{32}\,\frac{z^{-5}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}; \qquad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

3.2

Soluzione

$$y(n) = \quad \{-1,\ \ \underset{\uparrow}{0},\ \ 2,\ \ 6,\ \ 6,\ \ 4,\ \ 1\}$$

4 Sistemi LTI tempo-discreti (filtri digitali)

4.1

Soluzione

- $y(n) = 2y(n-1) - y(n-2) + 3x(n) - 2x(n-1)$
- Il filtro è causale e <u>non</u> è stabile, essendo i poli: $p_1 = p_2 = 1$.
- $y(4) = 1 \quad [y(0) = 3;\ y(1) = 1;\ y(2) = 1;\ y(3) = 1]$;

4.2

Soluzione

a)
- $H(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$
- 0 zeri;
  2 poli: $p_1 = +\frac{1}{4}$; $\ p_2 = +\frac{1}{2}$;
- il sistema è stabile;

- $H(\phi = \frac{1}{4}) = \dfrac{8}{7+6j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |H(\frac{1}{4})| = \dfrac{8}{\sqrt{85}} \approx 0.8677 \\ \angle H(\frac{1}{4}) = \arctan\left(-\dfrac{6}{7}\right) \approx -40.6° \end{cases}$
- Scomponendo in frazioni parziali si ottiene:
  $H(z) = \dfrac{2}{1 - \dfrac{1}{2}z^{-1}} - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4}z^{-1}} \quad \Rightarrow \; h(n) = (2^{1-n} - 4^{-n})\, u(n)$

b)

- $H(z) = \dfrac{1 - z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1} + 0.08z^{-2}}$
- 1 zero: $z_1 = 1$;
  2 poli: $p_1 = 0.2, \quad p_2 = 0.4$
- il sistema è stabile;
- $H(\phi = \frac{1}{4}) = \dfrac{1+j}{(1+0.4j)(1+0.2j)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |H(\frac{1}{4})| \approx 1.288 \\ \angle H(\frac{1}{4}) \approx 11.89° \end{cases}$
- Scomponendo in frazioni parziali si ottiene:
  $H(z) = \dfrac{4}{1 - 0.2z^{-1}} - \dfrac{3}{1 - 0.4z^{-1}} \quad \Rightarrow \; h(n) = (4 \cdot 0.2^n - 3 \cdot 0.4^n)\, u(n)$