

SEGNALI

DEFINIZIONE : SEGNALE : VETTORE d' INFORMAZIONE
COME RAPPRESENTO un SEGNALE ?

SEGNALE : GRANDEZZA FISICA, FUNZIONE di altra GRANDEZZA (es: tempo, spazio, ...)

SEGNALE $\equiv$ FUNZIONE : $y = f(x)$, $f: A \rightarrow B$

$x \in A$: A è il DOMINIO di f

$y \in B$: B è il CODOMINIO di f

CLASSIFICAZIONE dei SEGNALE

Dato un SEGNALE $y = f(x)$ con $f: A \rightarrow B$, $\begin{cases} x \in A : \text{DOMINIO di } f \\ y \in B : \text{CODOMINIO di } f \end{cases}$

CONTINUITA' del DOMINIO A:

- un segnale $y = f(x)$, $x \in A$ è SEGNALE CONTINUO sse A è un INSIEME CONTINUO (es: $A \subseteq \mathbb{R}$)
- un segnale $y = f(x)$, $x \in A$ è SEGNALE DISCRETO sse A è un INSIEME DISCRETO (es: $A \subseteq \mathbb{Z}$)

Es: SUONO : $p = f(t)$; $t \in \mathbb{R} \rightarrow$ segnale CONTINUO

T_{MIN} GIORNALE $T_{MIN} = f(n)$, $n \in \mathbb{Z} \rightarrow$ segnale DISCRETO

CONTINUITA' del CODOMINIO B:

- un segnale $y = f(x)$ è ad AMPIEZZE CONTINUE sse B è un INSIEME CONTINUO (es: $B \subseteq \mathbb{R}$)
- un segnale $y = f(x)$ è ad AMPIEZZE DISCRETE sse B è un INSIEME DISCRETO (es: $B \subseteq \mathbb{Z}$)

Es: SUONO : $p = f(t)$; $p \in \mathbb{R} \rightarrow$ ad AMPIEZZE CONTINUE

SEGNALE LOGICO : $y = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $y \in \{0, 1\} \rightarrow$ ad AMPIEZZE DISCRETE

Combinando questi due criteri, otteniamo:

CODOMINIO B

	DOMINIO A	
	CONTINUO	DISCRETO
$y = f(x)$		
CONTINUO	segnali ANALOGICI	segnali CAMPIONATI
DISCRETO	segnali QUANTIZZATI	segnali DIGITALI (o NUMERICI)

Esempio: segnale CD AUDIO $y = f(nT)$, $T = \frac{1}{44100}$ s $n \in \mathbb{Z} \rightarrow$ segnale DISCRETO
 segnale DIGITALE $\leftarrow y \in B = \{-32768, \dots, +32767\} \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow$ AMPIEZZE DISCRETE

GRADO di CONOSCENZA di un SEGNALE

$y(t) = 2 + \cos(10\pi t)$; $t \in \mathbb{R} \rightarrow$ segnale DETERMINISTICO

$y(t) = f(t, z) \rightarrow$ segnale NON DETERMINISTICO / CASUALE / ALEATORIO
 REALIZZAZIONE del SEGNALE

SEGNALI CONTINUI

DEF: $y = f(x)$, $x \in A$, dove A è CONTINUO (es: $A \equiv \mathbb{R}$)

OPERAZIONI COMUNI su SEGNALI CONTINUI

TRASLAZIONE

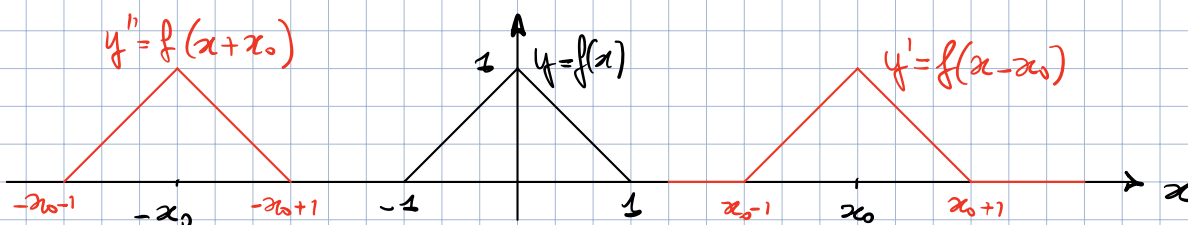
Dato: $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$
 dato: $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$

$$y' = f(x - x_0)$$

TRASLAZIONE di y di x_0
 (traslazione "IN AVANTI")

$$y'' = f(x + x_0)$$

TRASLAZIONE di y di $(-x_0)$
 (traslazione "ALL'INDIETRO")



Se x è il TEMPO t : $\int y = f(t) \begin{cases} \rightarrow y' = f(t-t_0) \text{ RITARDO di } t_0 \\ \rightarrow y'' = f(t+t_0) \text{ ANTICIPA di } t_0 \end{cases}$

SCALATURA delle VARIABILI INDIPENDENTE

Dato $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R} \rightarrow y' = f(ax)$, $a \in \mathbb{R}$

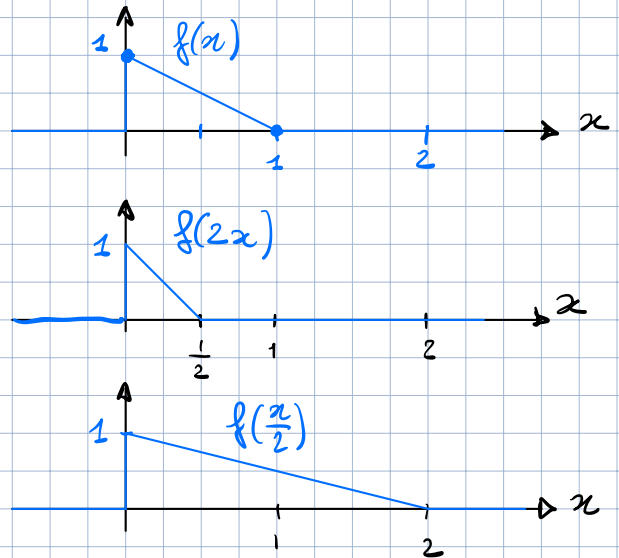
$$y = f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

• $a = 2$

$$y' = f(2x) = \begin{cases} 1-2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

• $a = \frac{1}{2}$

$$y'' = f\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 1-\frac{x}{2} & 0 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

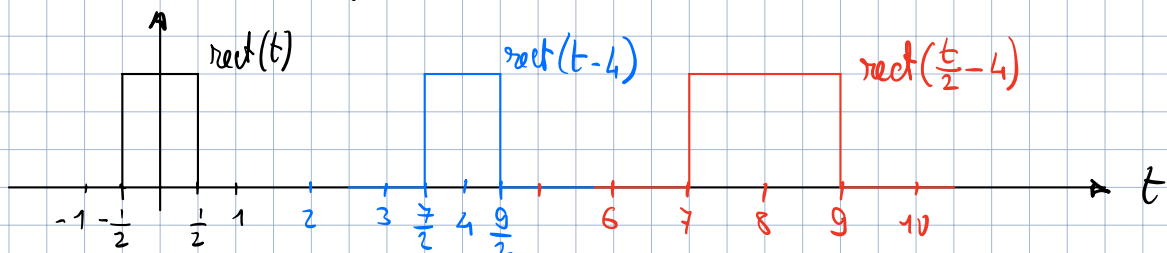


$|a| > 1 \rightarrow$ "COMPRESSIONE" sulle ASCISSE di un FATTORE a (CENTRATO nell'ORIGINE)

$|a| < 1 \rightarrow$ "ESPANSIONE" " " $\frac{1}{a}$ " "

$a < 0 \rightarrow$ RIBALTAMENTO SPECULARE sulle ASCISSE

Esempio: dato $y(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$, determinare $y' = \text{rect}\left(\frac{t}{2} - 4\right)$



1) TRASLAZIONE: $t \rightarrow t-4$

$$y' = \text{rect}(t-4) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t-4 \leq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{7}{2} \leq t \leq \frac{9}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2) SCALATURA: $t \rightarrow t/2$

$$y'' = y'\left(\frac{t}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{2} - 4\right) = \begin{cases} 1 & \frac{7}{2} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{9}{2} \rightarrow 7 \leq t \leq 9 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\text{rect}\left(\frac{t-8}{2}\right)$
 CENTRO $\text{rect}(x)$
 LARGHEZZA

SEGNALI NOTEVOLI

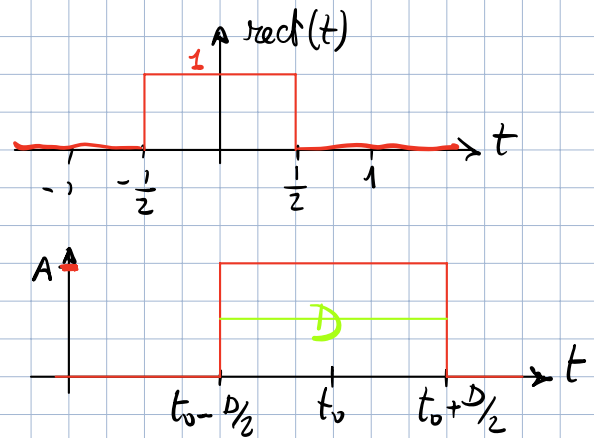
- Funzione **RETTANGOLO** (BOX, RECTANGLE, IMPULSO RETTANGOLARE)

$$y = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

In generale:

$$y = A \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{D}\right) = \begin{cases} A & t_0 - \frac{D}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{D}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

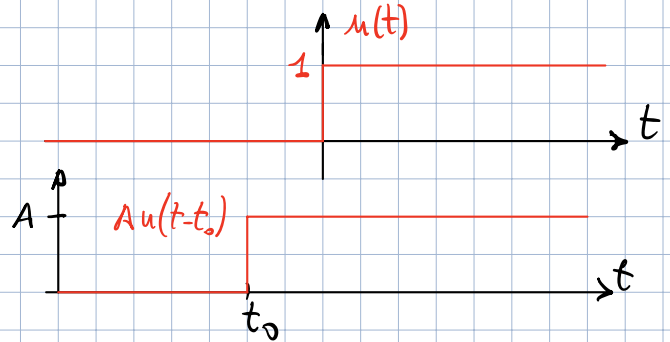
AMPIEZZA: D
CENTRO in t_0
DURATA: D



- GRADINO UNITARIO**

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

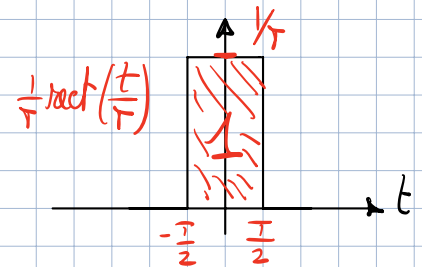
In generale: $y(t) = A u(t-t_0) = \begin{cases} A & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$



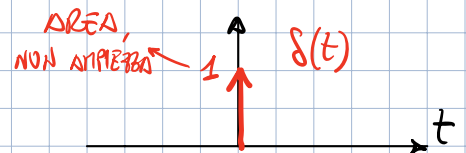
- IMPULSO IDEALE o "DELTA di DIRAC"**

IDEALIZZAZIONE del concetto di IMPULSO

$$\text{DEF: } \delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



$\delta(t)$ è una DISTRIBUZIONE (non è una FUNZIONE)



Esempio:

GRAFICO di $\delta(t) = 1 + 2\delta(t-5)$

PROPRIETÀ di $\delta(t)$:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ AREA UNITARIA di $\delta(t)$

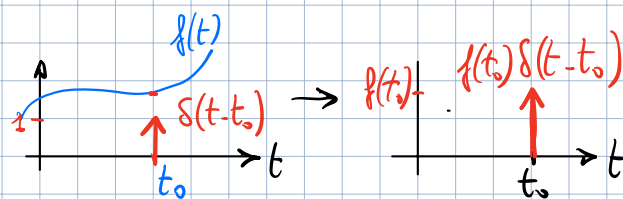


definisce PRODOTTO SCALARE tra FUNZIONI: $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t) dt$

- $\langle f(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0)$: PROPRIETÀ di CAMPIONAMENTO di $\delta(t)$

Generalizzando: $\langle f(t), \delta(t-t_0) \rangle = f(t_0)$

- PRODOTTO: $f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0) \delta(t-t_0)$



- PARITÀ: $\delta(t) = \delta(-t)$

- INTEGRAZIONE: $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = u(t)$: GRADINO unitario

• SEGNALI PERIODICI

$x(t)$ è PERIODICO sse $x(t) = x(t+T), \forall t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) = x(t+kT)$
 $\forall k \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}$

T : il PERIODO di $x(t)$ [s]

$1/T$: la FREQUENZA di $x(t)$ [s^{-1} = Hz]

Es: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t); \sin(2\pi f_0 t) \rightarrow \begin{cases} \text{PERIODO } T = 1/f_0 \\ \text{FREQUENZA } f = f_0 \end{cases}$

SINUSOIDE COMPLESSA / FASORE: $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)$

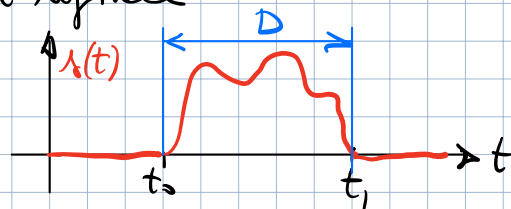
ATTRIBUTI di SEGNALE

DURATA di un SEGNALE: ESTENSIONE del MINIMO INTERVALLO che contiene il SUPPORTO del segnale

SUPPORTO di $x(t)$: $[t_0, t_1]$

↓

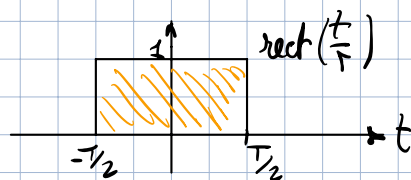
DURATA di $x(t)$: $D = t_1 - t_0$



AREA di un segnale: AREA SOTTOESA da $x(t)$

Dato $x(t)$: $AREA = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$

Es: AREA di $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1 \cdot dt = \left[t \right]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} = \frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) = T$$

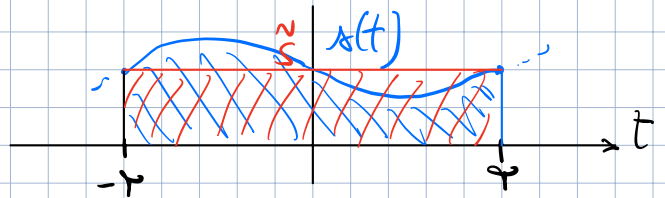
VALOR MEDIO di $f(t)$: il valore $\tilde{S}$ tale che la funzione $f'(t) = \tilde{S}$ abbia la STESSA AREA di $f(t)$

$$\tilde{S} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) dt$$

Es: valor medio del GRADINO:

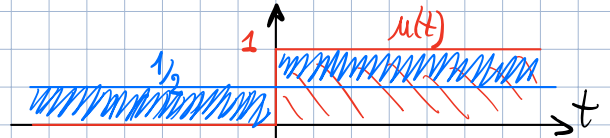
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 1 \cdot dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\int_{-T}^{+T} f(t) dt = \int_{-T}^{+T} \tilde{S} dt = \tilde{S} \cdot 2T$$

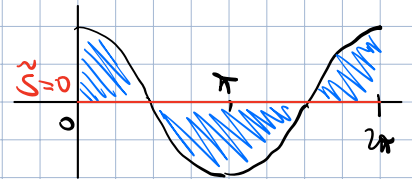
$$\tilde{S} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) dt$$



Se $f(t)$ è PERIODICO $\rightarrow$ VALOR MEDIO è CALCOLABILE su 1 SOLO PERIODO

Es: $f(t) = \cos(t) \rightarrow$ PERIODO $T = 2\pi$

$$\rightarrow \tilde{S} = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\sin(t) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (\sin 2\pi - \sin 0) = 0$$



ENERGIA e POTENZA di un SEGNALE

POTENZA ISTANTANEA di $f(t)$: $P(t)$

Dato $f(t) \rightarrow$ POT. ISTANTANEA $P(t) \stackrel{\text{DEF}}{=} f(t) \cdot \overline{f(t)} = |f(t)|^2 \in \mathbb{R}^+$; $P(t) \geq 0, \forall t$

• se $f(t) \in \mathbb{R} \rightarrow P(t) = f^2(t)$

ENERGIA di $f(t)$: AREA della POT. ISTANTANEA di $f(t)$:

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \in \mathbb{R}^+; \quad E_S \geq 0 \quad \text{se } f(t) \in \mathbb{R} \rightarrow E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$$

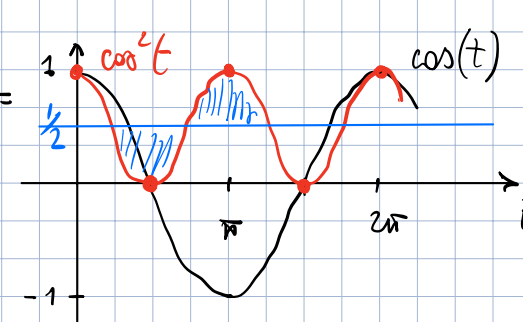
POTENZA MEDIA di $x(t)$: VALORE MEDIO dell'POT. ISTANTANEA di $x(t)$:

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} P(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \in \mathbb{R}^+; P_s \geq 0; x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt$$

- Se $x(t)$ è PERIODICO $\rightarrow$ POSSO CALCOLARE P_s su 1 SOLO PERIODO:

$$\hookrightarrow \text{Se } T \text{ è il PERIODO: } P_s = \frac{1}{T} \int_T P(t) dt$$

Esempio: $x(t) = \cos(t) \rightarrow P(t) = \cos^2(t)$; PERIODO $T = 2\pi$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow P_s &= \frac{1}{T} \int_T P(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} 1 \cdot dt + \int_0^{2\pi} \cos 2t dt \right] = \frac{1}{4\pi} \left[2\pi + \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[2\pi + (\cancel{\sin 4\pi} - \cancel{\sin 0}) \right] = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$


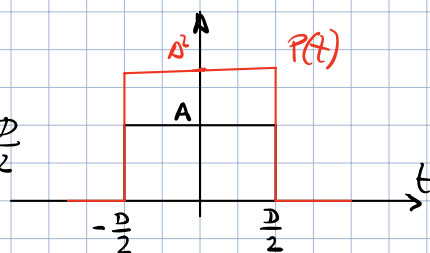
Esempi di calcolo di ENERGIA e POTENZA MEDIA:

- $x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{D}\right) \in \mathbb{R}$

- POT. ISTANTANEA: $P(t) = x^2(t) = A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{D}\right) = A^2 \text{rect}\left(\frac{t}{D}\right) = \begin{cases} A^2 & -\frac{D}{2} \leq t \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

- $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} A^2 dt = A^2 D$ E_s

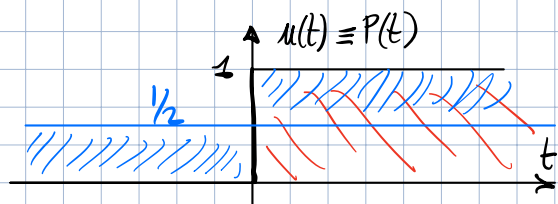
- $P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} A^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot A^2 D = 0$ P_s



- $x(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$

- POT. IST: $P(t) = u^2(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = u(t)$

- $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt = \int_0^{+\infty} 1 \cdot dt = \infty$ E_s



$$- P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 1 \cdot dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2} P_s$$

In SINTESI:

$x(t)$ è un SEGNALE ENERGIA SBE $0 < E_s < \infty \rightarrow P_s = 0$

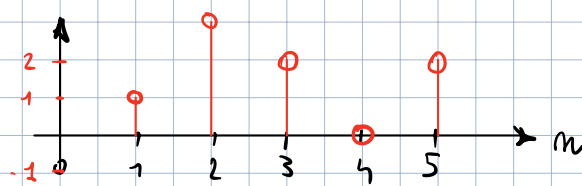
$x(t)$ è un SEGNALE POTENZA SBE $0 < P_s < \infty \rightarrow E_s = \infty$

SEGNALI DISCRETI

DEF: $y = f(x) : f : A \rightarrow B, \begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \rightarrow$ Se DOMINIO A è INSIEME DISCRETO $\rightarrow y = f(x)$ è SEGNALE DISCRETO

E_s : se $A \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow$ SEGNALE DISCRETO: $y = f(m), m \in \mathbb{Z}$

RAPPRESENTAZIONE: $y = f(n)$

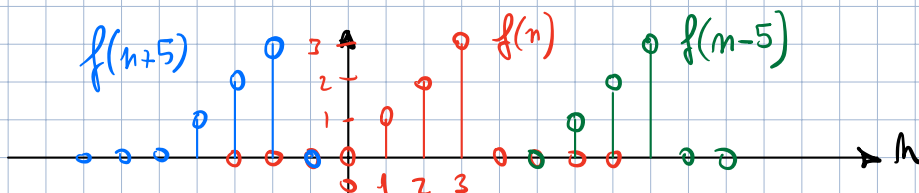


OPERAZIONI su SEGNALI DISCRETI

TRASLAZIONE

Dato $y = f(n), n \in \mathbb{Z}$

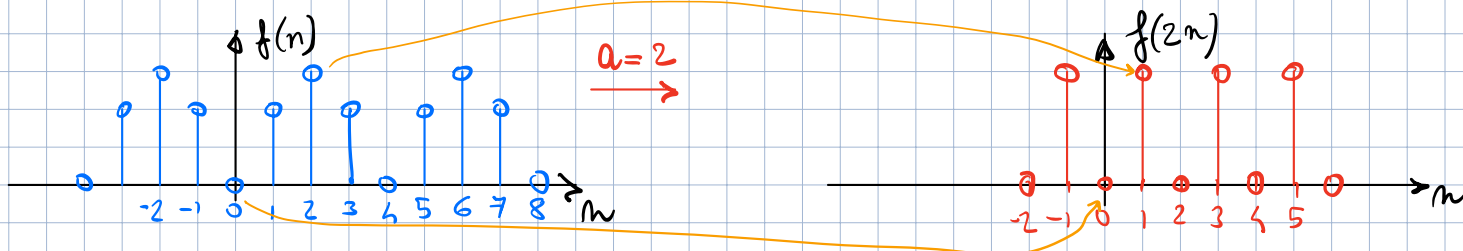
- $y' = f(n - m_0), m_0 \in \mathbb{Z}$: traslab. IN AVANTI di m_0
- $y'' = f(n + m_0), m_0 \in \mathbb{Z}$: traslab. ALL' INDIETRO di m_0



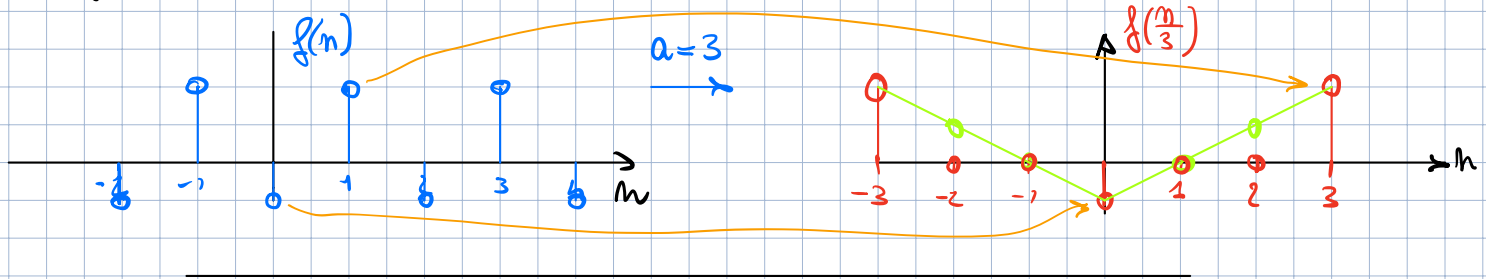
SCALATURA dello VAR. INDIP.

DECIMAZIONE / INTERPOLAZIONE (DOWN SAMPLING) (UP SAMPLING)

Dato $y = f(n), n \in \mathbb{Z}$: DECIMAZIONE $y' = f(an), a \in \mathbb{Z}, |a| > 1$



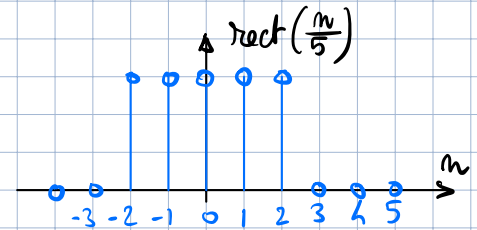
Dato $y = f(n)$ $n \in \mathbb{Z}$: INTERPOLAZIONE $y^n = f(\frac{n}{a})$, $a \in \mathbb{Z}$ $|a| > 1$



SEGNALI DISCRETI NOTEVOLI

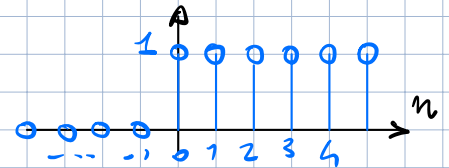
RETANGOLO DISCRETO

$$f(n) = \text{rect}\left(\frac{n}{D}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{D}{2} \leq n \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$



GRADINO UNITARIO DISCRETO

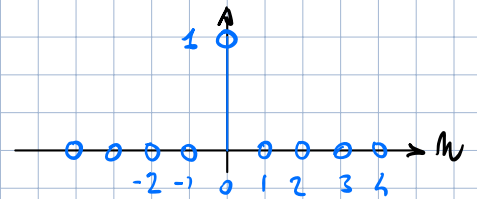
$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$



IMPULSO DISCRETO

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

è UNA FUNZIONE (DISCRETA),
(NON una distribuzione)



PROPRIETA' di $\delta(n)$:

- AREA UNITARIA : $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1$
- CAMPIONAMENTO : { PRODOTTO SCALARE DISCRETO : $\langle f, g \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) g(n)$ }
 $\langle f(n), \delta(n) \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) \cdot \delta(n) = f(0)$
 $\langle f(n), \delta(n - n_0) \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) \cdot \delta(n - n_0) = f(n_0)$
- PRODOTTO : $f(n) \delta(n - n_0) = f(n_0) \delta(n - n_0)$
- PARITA' : $\delta(n) = \delta(-n)$

- INTEGRAZIONE : $\sum_{i=-\infty}^m \delta(i) = \begin{cases} 0 & m < 0 \\ 1 & m \geq 0 \end{cases} = u(m)$ GRADINO DISCRETO (DISCRETA)

SEGNALI PERIODICI DISCRETI

$x(n)$ è PERIODICO SE $x(n) = x(n+N)$, $\forall n, N \in \mathbb{Z} \rightarrow x(n) = x(n+kN)$, $n, k, N \in \mathbb{Z}$

↳ PERIODO : $N \in \mathbb{Z}$

FREQUENZA : $f = \frac{1}{N} \in \mathbb{Q}$: è RAZIONALE!

esempio : $x(n) = \sin(2\pi f n)$, $f = \frac{1}{16} \in \mathbb{Q} \rightarrow N = 16$