SEGNALI → VETTORE di INFORMAZIONE

SEGNALE ≡ FUNZIONE

SEGNALE : GRANDEZZA FISICA, FUNZIONE di un'ALTRA GRANDEZZA (tempo, spazio)

VARIABILE INDIPENDENTE

SEGNALE : $y = f(x)$, $f: A \to B$

$x \in A$: il DOMINIO di f

$y \in B$: il CODOMINIO di f

Es: SUONO : Pressione $= f(\text{tempo})$ $\quad t \in \mathbb{R}$; $P \in \mathbb{R}$; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

IMMAGINE : Colore $= f(\text{spazio 2D})$ $\quad s \in A \subseteq \mathbb{R}^2$; $C \in B \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

CLASSIFICAZIONE di SEGNALI

Dato un segnale $y = f(x)$ con $f: A \to B$; $\begin{cases} x \in A : \text{DOMINIO di } f \\ y \in B : \text{CODOMINIO di } f \end{cases}$

CONTINUITÀ di un SEGNALE :

- CONTINUITÀ del DOMINIO A :

- un segnale $y=f(x)$, $x\in A$ è CONTINUO sse A è un INSIEME CONTINUO (es: $A\equiv\mathbb{R}$)
- un SEGNALE $y=f(x)$, $x\in A$ è DISCRETO sse A è un INSIEME DISCRETO (es: $A\equiv\mathbb{Z}$)

Es: SUONO: $p=f(t)$; $t\in\mathbb{R}$ $\rightarrow$ SEGNALE CONTINUO

T_{MIN} GIORNALIERA: $T_{MIN}=f(nT)$, $\begin{cases} n\in\mathbb{Z} \\ T=24h \end{cases} = f(n)$ $\rightarrow$ SEGNALE DISCRETO

- **CONTINUITÀ del CODOMINIO B:**

un segnale $y=f(x)$ è AD AMPIEZZE CONTINUE sse B è INSIEME CONTINUO (es. $B\subseteq\mathbb{R}$)

un segnale $y=f(x)$ è AD AMPIEZZE DISCRETE sse B è INSIEME DISCRETO (es. $B\subseteq\mathbb{Z}$)

Es: SUONO: $p=f(t)$: $p,t\in\mathbb{R}$ $\rightarrow$ ad AMPIEZZE CONTINUE, CONTINUO

SEGNALE LOGICO: $y=f(t)$: $t\in\mathbb{R}$; $y\in\{0,1\}$ $\rightarrow$ CONTINUO, AD AMP. DISCRETE

$y=f(x)$	DOMINIO (A): CONTINUO	DOMINIO (A): DISCRETO
CODOMINIO (B): CONTINUO	segnale ANALOGICO	segnale CAMPIONATO
CODOMINIO (B): DISCRETO	segnale QUANTIZZATO	segnale DIGITALE $\rightarrow$ (o NUMERICO)

Esempio: segnale CD AUDIO $y=f(nT)$; $T=\frac{1}{44100}\,s$

$y=f(nT)=f(n)$: dominio A: $n\in\mathbb{Z}$ $\rightarrow$ DISCRETO

$y\in B\equiv\{-32768\ldots+32767\}$ (64k AMPIEZZE) $B\subseteq\mathbb{Z}$ $\rightarrow$ ad AMPIEZZE DISCRETE

$\rightarrow$ CD-AUDIO $\rightarrow$ segnale DIGITALE

GRADO di CONOSCENZA di un SEGNALE

$y(t)=2+\cos(10\pi t)$; $t\in\mathbb{R}$ $\rightarrow$ segnale DETERMINISTICO

$y(t) \longrightarrow y(t, r) \longrightarrow$ Segnale NON DETERMINISTICO / CASUALE / ALEATORIO

r: REALIZZAZIONE del SEGNALE

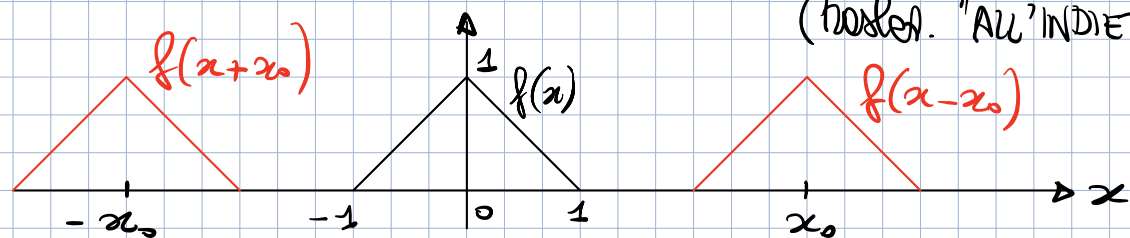
OPERAZIONI sui SEGNALI : SEGNALI CONTINUI

Def: $y = f(x)$, $x \in A$ CONTINUO (es: $A \equiv \mathbb{R}$)

TRASLAZIONE

Dato $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $y' = f(x - x_0)$ TRASLAZIONE di y di x_0 (traslazione "IN AVANTI")

$\longrightarrow$ $y'' = f(x + x_0)$ TRASLAZIONE di y di: $(-x_0)$ (trasla. "ALL'INDIETRO")

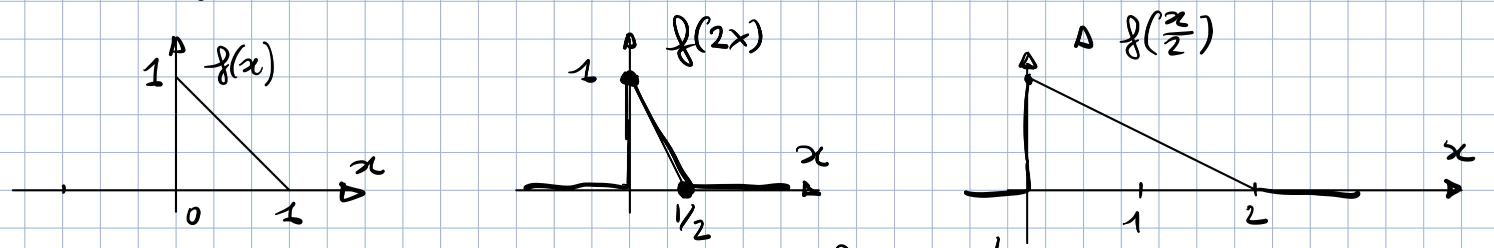


Se x è il TEMPO: $y = f(t) \longrightarrow y' = f(t - t_0)$ RITARDO di t_0

$y'' = f(t + t_0)$ ANTICIPO di t_0

SCALATURA della VARIABILE INDIPENDENTE

Dato: $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R} \longrightarrow y' = f(ax)$, FATTORE $a \in \mathbb{R}$



$$y = \underbrace{\begin{cases} 1 - x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

$$f(2x) = \begin{cases} 1 - 2x & 0 \le x \le 1/2 \quad 0 \le 2x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

sostituisco $x \to 2x$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

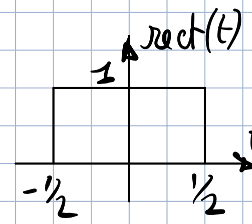
$|a| > 1 \rightarrow$ "COMPRESSIONE" di fattore a (centrata nell'ORIGINE)

$|a| < 1 \rightarrow$ "ESPANSIONE" di fattore a

$a < 0 \rightarrow$ "RIBALTAMENTO SPECULARE" sulle ASCISSE

ESEMPIO:

data $\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$, determinare $y = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2} - 4\right)$



1) TRASLAZIONE: $t \rightarrow t-4$

$$y' = \mathrm{rect}(t-4) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t-4 \leq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{7}{2} \leq t \leq \frac{9}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

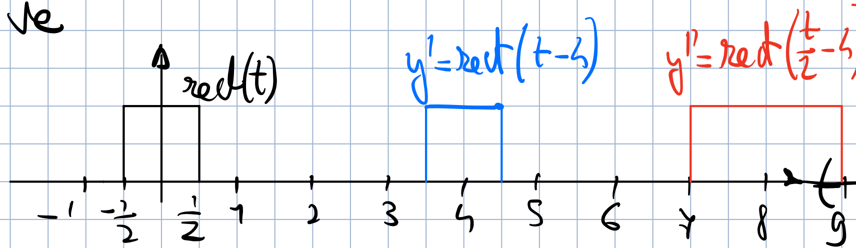
2) SCALATURA: $t \rightarrow \frac{t}{2}$

$$y'' = y'\left(\frac{t}{2}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2} - 4\right) = \begin{cases} 1 & \frac{7}{2} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{9}{2} \rightarrow 7 \leq t \leq 9 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\mathrm{rect}\left(\frac{t-8}{2}\right)$

8 → CENTRO del RECT( )

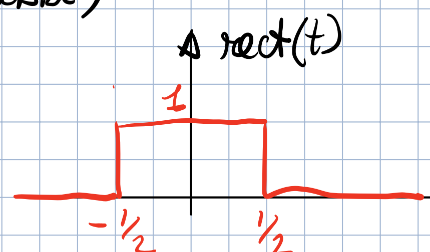
2 → DURATA



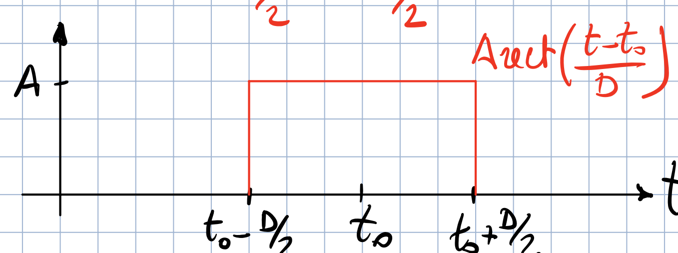
SEGNALI NOTEVOLI

- Funzione RETTANGOLO ("BOX", IMPULSO RETTANGOLARE)

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

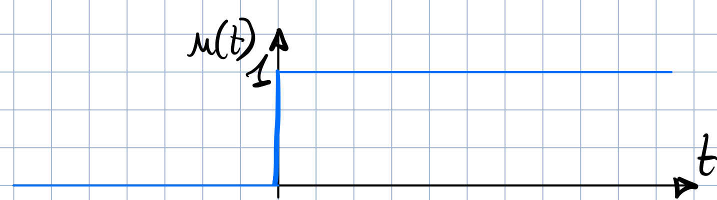


$$y = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{D}\right)$$

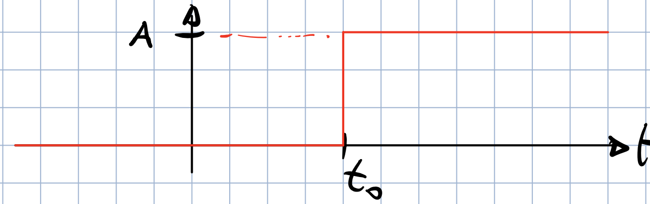


- GRADINO (UNITARIO):

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

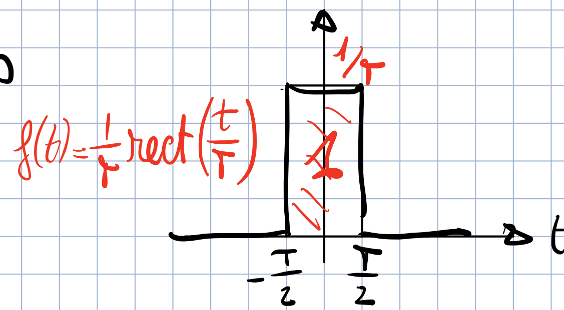


In generale: $y(t) = A\, u(t-t_0)$



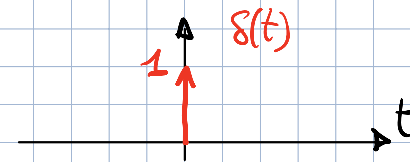
IMPULSO IDEALE $\Rightarrow$ "DELTA di DIRAC"

Idealizzazione del concetto di IMPULSO

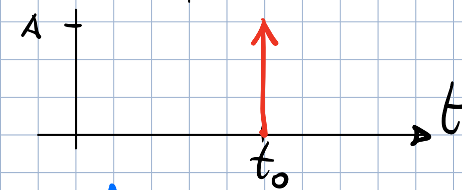


DEF: $\boxed{\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T}\,\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)}$

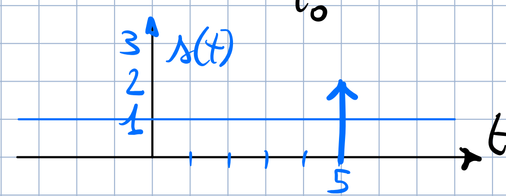
→ è una DISTRIBUZIONE



In generale: $f(t) = A\,\delta(t-t_0)$



Esempio: grafico di $s(t) = 1 + 2\,\delta(t-5)$



PROPRIETÀ di $\delta(t)$:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$ AREA UNITARIA di $\delta(t)$
- definisco il PRODOTTO SCALARE tra FUNZIONI: $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$

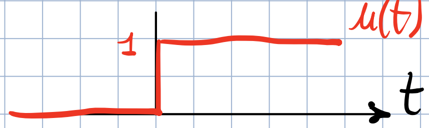
$\langle f(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t)\,dt = f(0)$ PROPRIETÀ del CAMPIONAMENTO di $\delta(t)$

In generale $\langle f(t), \delta(t-t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$

PROPRIETÀ di $\delta(t)$:

- AREA UNITARIA: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$
- CAMPIONAMENTO: $\langle f, \delta(t-t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$
- PRODOTTO: $f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$

- PARITÀ : $\delta(t) = \delta(-t)$
- INTEGRAZIONE: $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} = u(t)$: GRADINO UNITARIO



SEGNALI PERIODICI

$s(t)$ è PERIODICO sse $s(t) = s(t+T), \forall t \in \mathbb{R} \rightarrow s(t) = s(t+kT), \forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}$

T: il PERIODO di $s(t)$ $[s]$

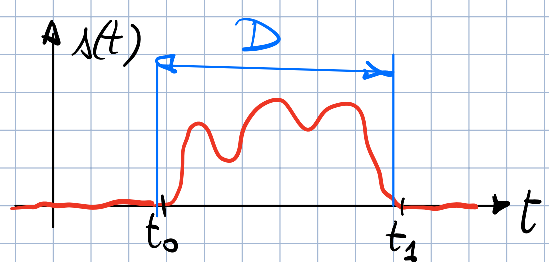
$1/T$: la FREQUENZA di $s(t)$ $[s^{-1} = Hz]$

Es: $f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$; $\sin(2\pi f_0 t)$ $\longrightarrow \begin{cases} \text{PERIODO}: \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi} f_0} = \frac{1}{f_0} \\ \text{FREQUENZA}: f_0 \end{cases}$

FASORE: $s(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$

ATTRIBUTI di SEGNALI

$\boxed{\text{DURATA}}$ di un segnale



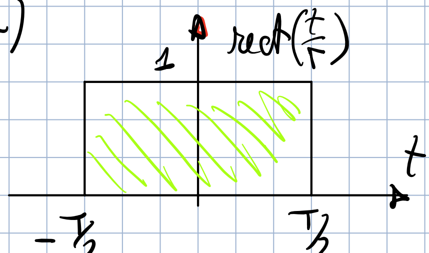
DURATA di $s(t)$: $D = t_1 - t_0$

↓

DURATA : ESTENSIONE del MINIMO INTERVALLO che contiene il SUPPORTO di $s(t)$

$\boxed{\text{AREA}}$ di un segnale : AREA SOTTESA da $s(t)$

$$AREA = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, dt$$



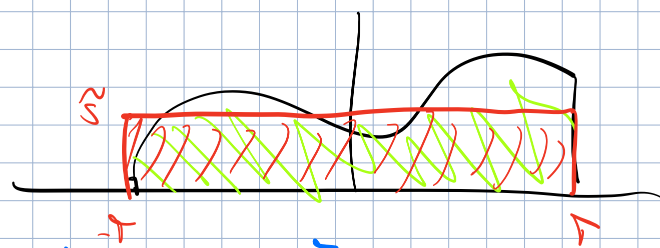
ESEMPIO: AREA di $s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, dt = \int_{-T/2}^{+T/2} 1 \cdot dt = T$$

VALOR MEDIO di $s(t)$:

Il valore $\tilde{s}$ tale che $s'(t) = \tilde{s}$ ha la STESSA AREA di $s(t)$

$$\tilde{s} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t)\,dt$$



$$\int_{-T}^{T} s(t)\,dt = \int_{-T}^{T} \tilde{s}\,dt = \tilde{s}\cdot 2T$$

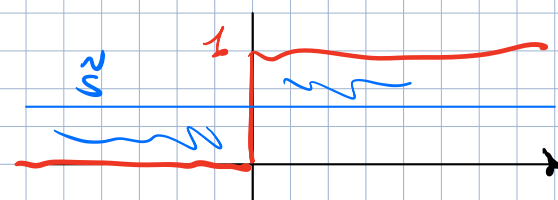
$$\tilde{s} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t)\,dt$$

Es: Valor medio del GRADINO:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{s} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{0}^{T} 1\cdot dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\cancel{T}}\cancel{T} = \frac{1}{2}$$

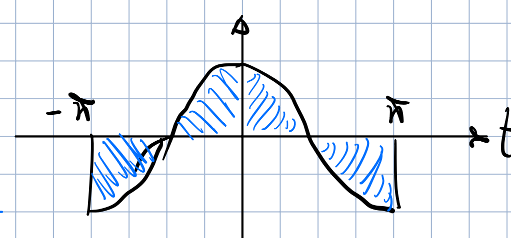


- Se $s(t)$ è PERIODICO $\longrightarrow$ VALOR MEDIO CALCOLABILE su un SOLO PERIODO

Es: $s(t) = \cos(t) \longrightarrow$ PERIODO $T = 2\pi$

$$\tilde{s} = \cancel{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t)\,dt} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} s(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \cos(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\Big[\sin(t)\Big]_{0}^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[\cancel{\sin(2\pi)} - \cancel{\sin(0)}\Big] = 0$$



ENERGIA e POTENZA di un segnale

POTENZA ISTANTANEA di $s(t)$:

Def: $P(t) = s(t)\cdot\overline{s(t)} = |s(t)|^2$

se $s(t) \in \mathbb{R} \longrightarrow P(t) = s^2(t)$

ENERGIA di $s(t)$: AREA della POT. ISTANTANEA di $s(t)$

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt \quad ; \text{ se } s(t)\in\mathbb{R} \rightarrow E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt$$

POTENZA MEDIA di $s(t)$: VALOR MEDIO della POT. IST. di $s(t)$:

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} P(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |s(t)|^2\,dt = \{\text{se } s(t)\in\mathbb{R}\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^2(t)\,dt$$

- Se $s(t)$ è PERIODICO $\rightarrow$ posso considerare 1 SOLO PERIODO

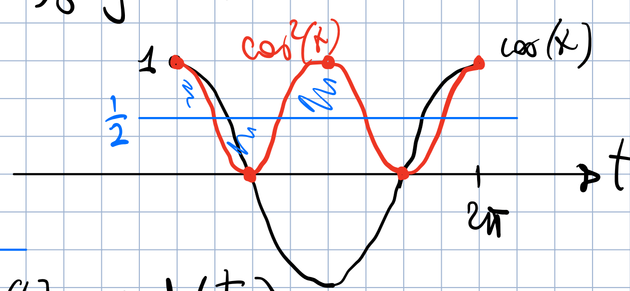
Es: $s(t) = \cos(t) \longrightarrow P(t) = \cos^2(t)$

PERIODICO, $T = 2\pi$

$$P_s = \cancel{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \cos^2(t)\,dt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt =$$

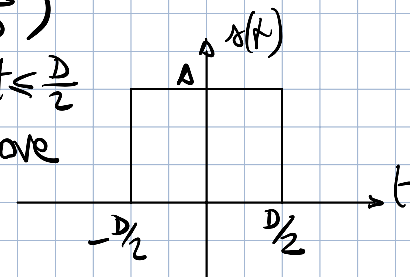
$$= \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \cos(2t)\,dt\right] = \frac{1}{4\pi}\left[2\pi + \left(\frac{\sin 2t}{2}\right)_0^{2\pi}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[2\pi + \frac{1}{2}(\cancel{\sin 4\pi} - \cancel{\sin 0})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}$$



Es: calcolo ENERGIA e POT. MEDIA di: $s(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right)$

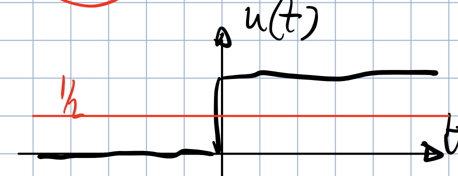
POT. ISTANTANEA: $P(t) = s^2(t) = A^2\,\mathrm{rect}^2\left(\frac{t}{D}\right) = \begin{cases} A^2 & -\frac{D}{2}\le t\le \frac{D}{2} \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$



$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-D/2}^{D/2} A^2\,dt = A^2 D \quad E_s$$

$$P_s = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^2(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-D/2}^{+D/2} A^2\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}A^2\cdot D = 0 \quad P_s$$

ENERGIA e POT. MEDIA di $u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$



POT. IST. : $P(t) = u^2(t) = \begin{cases} 1 & t\ge 0 \\ 0 & t<0\end{cases} = u(t)$

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,dt = \int_0^{+\infty} 1\cdot dt = \infty \quad E_s$$

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} p(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T 1\cdot dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\cancel{T}}\cdot\cancel{T} = \frac{1}{2}\ P_s$$

$s(t)$ è un SEGNALE ENERGIA sse $0 < E_s < \infty \longrightarrow P_s = 0$
$s(t)$ è un SEGNALE POTENZA sse $0 < P_s < \infty \longrightarrow E_s = \infty$

SEGNALI DISCRETI

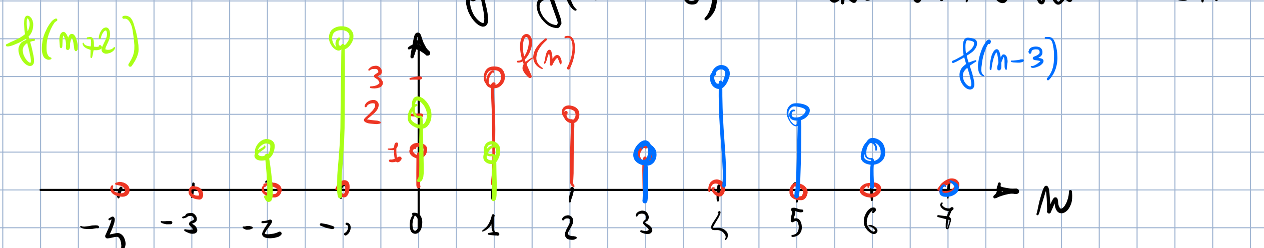
$y = f(x)$, $f: A \to B$; $\begin{cases} x\in A \\ y \in B \end{cases}$ $\longrightarrow$ se A è INSIEME DISCRETO $\downarrow$ y è un SEGNALE DISCRETO

se $A \equiv \mathbb{Z} \longrightarrow$ SEGNALE DISCRETO : $y = f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$

OPERAZIONI su SEGNALI DISCRETI

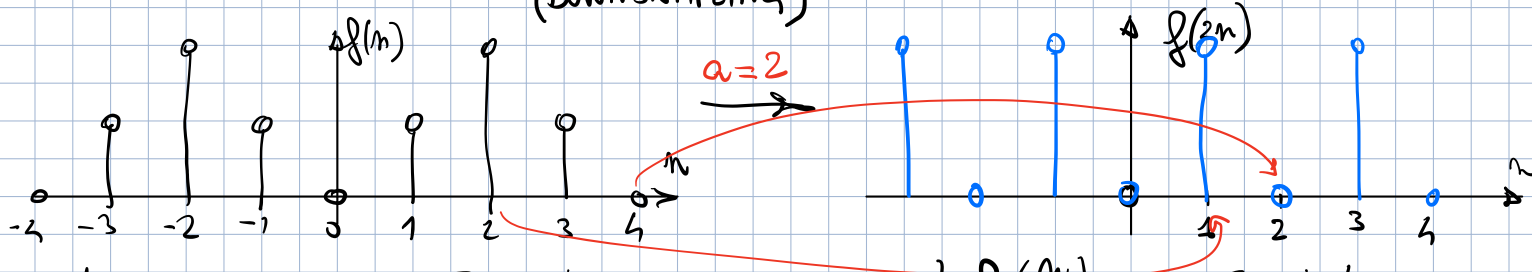
TRASLAZIONE

Dato $y = f(n)$, $n\in\mathbb{Z}$ $\longrightarrow$ $y' = f(n-n_0)$ TRASLAZ. in AVANTI di n_0
$\longrightarrow$ $y'' = f(n+n_0)$ TRASLAZ. di n_0 all'INDIETRO

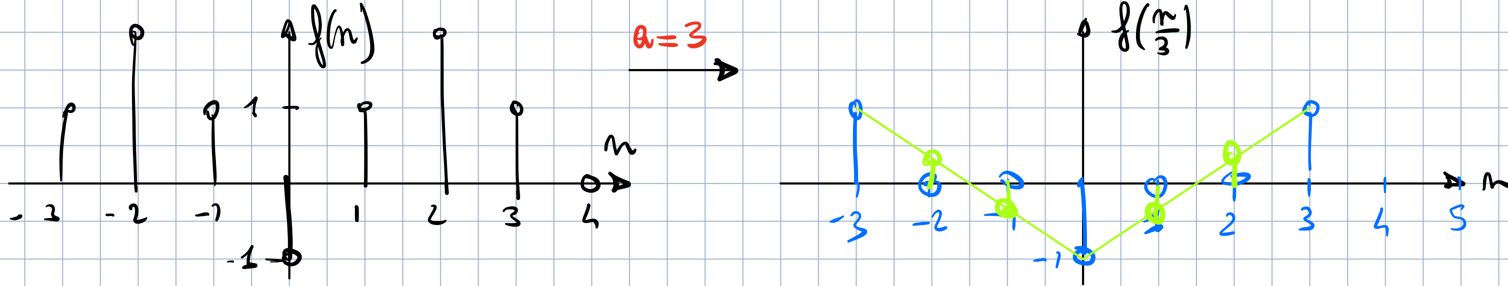


~~SCALATURA~~ $\to$ DECIMAZIONE / INTERPOLAZIONE

Dato $y = f(n)$ $n\in\mathbb{Z}$: DECIMAZIONE (DOWNSAMPLING) $y' = f(an)$ $a\in\mathbb{Z}$, $|a| > 1$



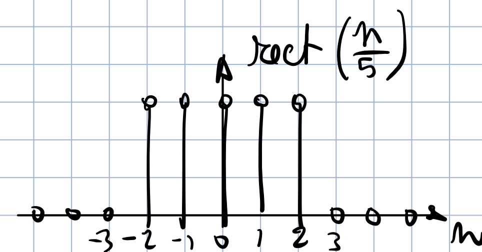
Dato $y = f(n)$, $n\in\mathbb{Z}$: INTERPOLAZIONE (UP SAMPLING) $y' = f\left(\frac{n}{a}\right)$, $a\in\mathbb{Z}$ $|a| > 1$



SEGNALI NOTEVOLI DISCRETI

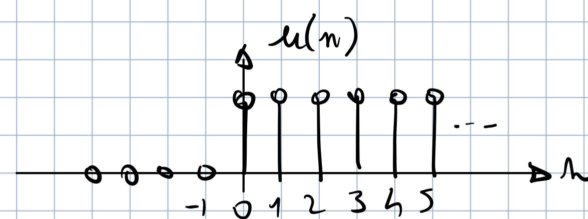
RETTANGOLO DISCRETO

$$f(n) = \text{rect}\left(\frac{n}{D}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{D}{2} \le n \le \frac{D}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}$$



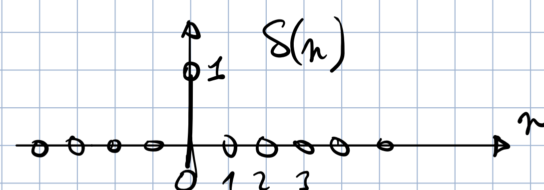
GRADINO UNITARIO DISCRETO

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



IMPULSO DISCRETO

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}$$



PROPRIETÀ di $\delta(n)$:

AREA UNITARIA : $\sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \, \delta(n) = 1$

CAMPIONAMENTO : [Prodotto scalare DISCRETO: $\langle f, g \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \, f(n) g(n)$]

$$\langle f(n), \delta(n) \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \, f(n)\, \delta(n) = f(0)$$

$$\langle f(n), \delta(n-n_0) \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \, f(n)\, \delta(n-n_0) = f(n_0)$$

PRODOTTO : $f(n)\,\delta(n-n_0) = f(n_0)\,\delta(n-n_0)$

PARITÀ : $\delta(n) = \delta(-n)$

INTEGRAZIONE (DISCRETA) : $\longrightarrow \sum_{-\infty}^{n} {}_i \, \delta(i) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} = u(n)$ GRADINO DISCRETO

SEGNALI PERIODICI DISCRETI

Se $s(n) = s(n+N), \forall n \in \mathbb{Z} \longrightarrow s(n) = s(n+kN), \quad n,k,N \in \mathbb{Z}$

$\hookrightarrow$ $s(n)$ è PERIODICO, con PERIODO $= N \in \mathbb{Z}$

FREQUENZA $f = \frac{1}{N} \in \mathbb{Q}$ è RAZIONALE!

Es: $x(n) = A \sin(2\pi f n)$; $f = \frac{1}{16} \rightarrow N = 16$