



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

- DIPARTIMENTO DI SCIENZE DELL'INFORMAZIONE -

Dispensa del corso

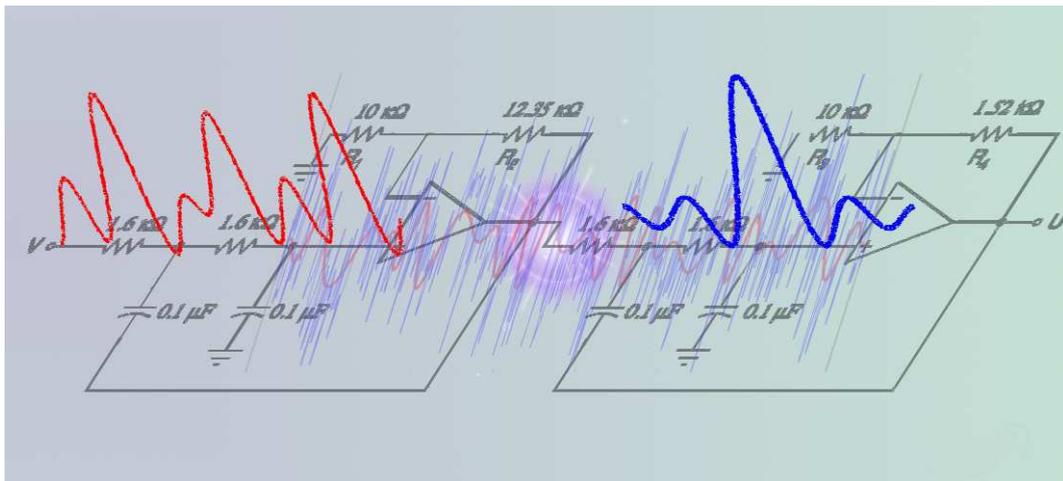
di

---

## Elaborazione Numerica dei Segnali

---

Alberto Bertoni Giuliano Grossi



Anno Accademico 2009-2010



# Indice

<b>1</b>	<b>Segnali e Sistemi</b>	<b>1</b>
1.1	Segnali e Informazione . . . . .	2
1.2	Classificazione dei Segnali . . . . .	4
1.2.1	Segnali Notevoli . . . . .	6
1.2.2	Segnali Deterministici e Probabilistici . . . . .	11
1.3	Sistemi per l'Elaborazione dei Segnali Deterministici . . . . .	11
1.3.1	Composizionalità nei Sistemi . . . . .	15
1.3.2	Spazi Vettoriali di Segnali . . . . .	17
1.3.3	Sistemi Lineari . . . . .	21
1.3.4	Sistemi Tempo-Invarianti . . . . .	23
1.3.5	Sistemi Causali e Stabili . . . . .	25
1.4	Sistemi LTI Causali a Tempo Discreto . . . . .	30
1.4.1	Sistemi LTI Caratterizzati da Equazioni alle Differenze . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Analisi in Frequenza di Segnali Analogici</b>	<b>47</b>
2.1	Numeri Complessi . . . . .	48
2.2	Segnali Periodici . . . . .	50
2.3	Risposta in Frequenza dei Sistemi LTI . . . . .	53
2.4	Serie di Fourier . . . . .	54
2.5	Trasformata di Fourier . . . . .	59
2.5.1	Esistenza della Trasformata di Fourier . . . . .	63
2.5.2	Potenza, Energia di un Segnale e Relazione di Parseval . . . . .	66
2.5.3	Banda e Ampiezza di Banda di un Segnale . . . . .	67
2.5.4	Trasformata di Fourier di Funzioni Reali . . . . .	68
2.5.5	Proprietà della Trasformata di Fourier . . . . .	69
2.5.6	Coppie Base di Trasformate . . . . .	76
2.6	Risposta in Frequenza dei Sistemi Lineari Tempo-Invarianti . . . . .	76
2.6.1	Filtri Ideali . . . . .	78
2.6.2	Sistemi Caratterizzati da Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Costanti . . . . .	80
2.7	Modulazione nei Sistemi di Comunicazione . . . . .	83
2.7.1	Modulazione e Demodulazione in Ampiezza (AM) . . . . .	84
2.8	Modulazione e Demodulazione in Frequenza (FM) . . . . .	88
2.9	Algoritmi in Matlab . . . . .	94

<b>3</b>	<b>Filtri Analogici</b>	<b>99</b>
3.1	Caratteristiche dei Filtri Analogici . . . . .	100
3.2	Famiglie di Filtri Causali . . . . .	104
3.2.1	Filtri di Butterworth . . . . .	104
3.2.2	Filtri di Chebyshev . . . . .	106
3.3	Realizzazione di Filtri Analogici . . . . .	109
3.3.1	Circuiti ad Elementi Passivi . . . . .	109
3.3.2	Realizzazione di Filtri di Butterworth con Circuiti ad Elementi Attivi	112
<b>4</b>	<b>Conversione Analogico-Digitale</b>	<b>117</b>
4.1	Campionamento . . . . .	118
4.2	Quantizzazione . . . . .	125
4.2.1	Quantizzatore Uniforme e Rumore di Quantizzazione . . . . .	125
4.2.2	Quantizzatore Non Uniforme . . . . .	128
4.3	Convertitore Analogico-Digitale (ADC) . . . . .	129
4.3.1	Sovracampionamento nella Conversione Analogico-Digitale . . . . .	131
4.3.2	Sovracampionamento: ADC con Quantizzatore di 1 Bit . . . . .	133
4.4	Convertitore Digitale-Analogico (DAC) . . . . .	134
4.4.1	Analisi in Frequenza di un Convertitore ZOH . . . . .	135
4.4.2	Sovracampionamento nella Conversione Digitale-Analogica . . . . .	137
4.5	Trasmissione di Segnali Digitalizzati . . . . .	138
4.5.1	Modulazione a Impulso . . . . .	138
4.5.2	Delta-Modulazione . . . . .	140
4.5.3	Codifica di Linea . . . . .	141
<b>5</b>	<b>Trasformata Discreta di Fourier</b>	<b>143</b>
5.1	Segnali Periodici a Tempo Discreto . . . . .	144
5.2	Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT) . . . . .	146
5.2.1	Proprietà della Trasformata di Fourier a Tempo Discreto . . . . .	151
5.3	Trasformata Discreta di Fourier (DFT) . . . . .	153
5.3.1	Proprietà della DFT . . . . .	154
5.4	Calcolo Veloce della Trasformata Discreta: Algoritmo FFT . . . . .	156
5.5	Applicazioni della Trasformata Discreta di Fourier . . . . .	157
<b>6</b>	<b>Architetture DSP</b>	<b>165</b>
6.1	Elaborazione Digitale dei Segnali: Approcci . . . . .	166
6.2	Architettura Von Neumann e Harvard . . . . .	167
6.3	Istruzioni di Base di un DSP . . . . .	170
6.4	Livello di Integrazione delle Componenti di un DSP . . . . .	172
6.5	H/W Specializzato: Moltiplicazione Veloce . . . . .	172
6.6	Elaborazione Parallela: SIMD e Superscalari . . . . .	174
<b>7</b>	<b>Trasformata Zeta e Sistemi LTI a Tempo Discreto</b>	<b>177</b>
7.1	Richiami di Analisi Complessa . . . . .	178
7.2	Trasformata e Antitrasformata Zeta . . . . .	182
7.2.1	Proprietà della Trasformata Zeta . . . . .	186
7.3	Analisi di Sistemi LTI a Tempo Discreto: Stabilità e Causalità . . . . .	189
7.4	Trasformata Zeta e Trasformata di Fourier a Tempo Discreto . . . . .	191

7.4.1	Risposta in Frequenza di Filtri Lineari a Tempo Discreto . . . . .	192
7.4.2	Risposta in Frequenza nel Caso di Funzioni di Trasferimento Razionali . . . . .	194
7.5	Sistemi in Multifrequenza: Decimazione e Interpolazione . . . . .	195
<b>8</b>	<b>Filtri Digitali FIR e IIR</b> . . . . .	<b>199</b>
8.1	Filtri FIR e IIR Causali . . . . .	200
8.1.1	Filtri FIR e Filtri a Fase Lineare . . . . .	201
8.1.2	Filtri IIR . . . . .	202
8.2	Applicazioni di Filtri FIR e IIR . . . . .	204
8.2.1	Zeri di Filtri a Fase Lineare: i Filtri COMB . . . . .	204
8.2.2	Filtri Notch (a Intaglio) . . . . .	206
8.2.3	Equalizzatore a un Polo . . . . .	208
8.3	Progetto di Filtri Digitali . . . . .	209
8.3.1	Specifiche di Filtri Digitali . . . . .	209
8.3.2	Progetto di Filtri FIR mediante Finestre . . . . .	211
8.3.3	Progetto di Filtri FIR col Metodo Ottimo . . . . .	216
8.3.4	Progetto di Filtri IIR da Filtri Analogici . . . . .	219
8.4	Realizzazione di Filtri Digitali . . . . .	220
8.4.1	Analisi di Reti . . . . .	221
8.4.2	Reti Modulari a più Ingressi e Uscite . . . . .	222
8.4.3	Analisi del Modulatore Sigma-Delta (SDM) . . . . .	225
8.4.4	Sintesi di Reti . . . . .	227
8.4.5	Rumore nel Disegno di Filtri Digitali . . . . .	229
<b>9</b>	<b>Processi Stocastici e loro Caratteristiche Spettrali</b> . . . . .	<b>233</b>
9.1	Processi Stocastici . . . . .	234
9.1.1	Caratterizzazione Statistica di un Processo . . . . .	237
9.2	Processi Stocastici Stazionari . . . . .	239
9.3	Medie Temporalì ed Ergodicit� . . . . .	242
9.4	Caratteristiche Spettrali dei Processi Stocastici . . . . .	244
<b>10</b>	<b>Risposta di Sistemi a Segnali Casuali e Modelli di Rumore</b> . . . . .	<b>249</b>
10.1	Risposta di Sistemi a Segnali Casuali . . . . .	249
10.2	Rumore Impulsivo . . . . .	253
10.2.1	Rumore Impulsivo Additivo . . . . .	255
10.2.2	Eliminazione di Rumore Impulsivo Additivo . . . . .	256
<b>11</b>	<b>Filtri di Wiener</b> . . . . .	<b>259</b>
11.1	Formulazione nel Dominio delle Frequenze . . . . .	259
11.2	Filtro di Wiener FIR . . . . .	262
11.3	Algoritmi Adattativi per Filtri di Wiener: LMS . . . . .	264
<b>A</b>	<b>Richiami di Teoria della Probabilit�</b> . . . . .	<b>267</b>



# SEGNALI E SISTEMI

I concetti di segnale e di sistema sono presenti in un'ampia gamma di discipline e campi applicativi. Le idee e i metodi sviluppati attorno a questi concetti giocano un ruolo importante in diverse aree scientifiche e tecnologiche come le telecomunicazioni, la progettazione di circuiti, il controllo di processi industriali, l'acustica, l'elaborazione del parlato, l'ingegneria biomedica. Sebbene la natura fisica dei segnali e dei sistemi possa essere differente, essi hanno in comune due caratteristiche essenziali. I segnali, che sono grandezze dipendenti da una o più variabili temporali o spaziali, contengono informazione riguardo lo stato di qualche fenomeno, mentre i sistemi rispondono a sollecitazioni dovute a qualche segnale producendo a loro volta segnali o qualche comportamento desiderato. Le tensioni o le correnti (funzioni del tempo) in ingresso e in uscita a un circuito elettrico sono esempi di segnali, mentre il circuito stesso è un esempio di sistema, così come un sistema è la fotocamera che cattura la luce riflessa dagli oggetti inquadrati e impressiona con un'immagine.

Le principali problematiche che si affrontano nello studio dei sistemi sono quelle di *analisi* e di *disegno* o *progettazione*. L'analisi riguarda lo studio di caratteristiche del comportamento di un dato sistema, il disegno si propone di identificare, se esiste, un sistema che esibisca un dato comportamento. Un esempio è costituito dalla progettazione di sistemi per estrarre o ripristinare informazione danneggiata: il caso tipico è quello della comunicazione affetta da rumore in cui è richiesto lo sviluppo di sistemi in grado di correggere eventuali errori.

In questo capitolo vengono introdotte le nozioni di base riguardanti segnali e siste-

mi. Viene presentata una semplice tassonomia dei tipi di segnale: continui/discreti, deterministici/probabilistici.

Il comportamento di un sistema viene descritto attraverso la relazione ingresso-uscita. Vengono poi introdotte due importanti classi di sistemi: *sistemi lineari* e *sistemi tempo-invarianti*. In particolare, si mostra che il comportamento di un sistema lineare tempo-invariante (LTI) è univocamente individuato dalla risposta del sistema al segnale impulsivo.

Limitatamente ai sistemi LTI, vengono discusse le nozioni di causalità e stabilità; viene infine introdotta e analizzata la classe dei sistemi a tempo discreto caratterizzati da equazioni alle differenze lineari.

## 1.1 Segnali e Informazione

Si può pensare ad un *segnale* come una grandezza fisica che varia con il tempo, lo spazio o una qualsiasi variabile indipendente. Più in generale esso è un'entità contenente qualche tipo di informazione che può essere estratta, trasmessa o elaborata. Segnali di particolare interesse nella vita quotidiana sono: segnali del parlato, che si incontrano anche in telefonia e radio; segnali video e immagini; suoni e musica, riproducibili ad esempio da un lettore di CD; segnali biomedici, come elettrocardiogrammi e radiografie.

Sul piano matematico, un segnale è rappresentato da una funzione  $g = f(x)$ , dove:

- $g$  denota una variabile (dipendente) sui valori di una grandezza fisica o chimica (corrente, tensione, pressione, concentrazione di molecole e così via).
- $x$  denota una variabile (indipendente) sui valori di un vettore di coordinate, generalmente spaziali o temporali.
- $f$  denota la relazione funzionale che associa ad ogni valore di  $x$  il corrispondente valore della grandezza fisica  $g$ .

In Figura 1.1 è mostrato un esempio di segnale acustico. Esso è identificato dalla com-

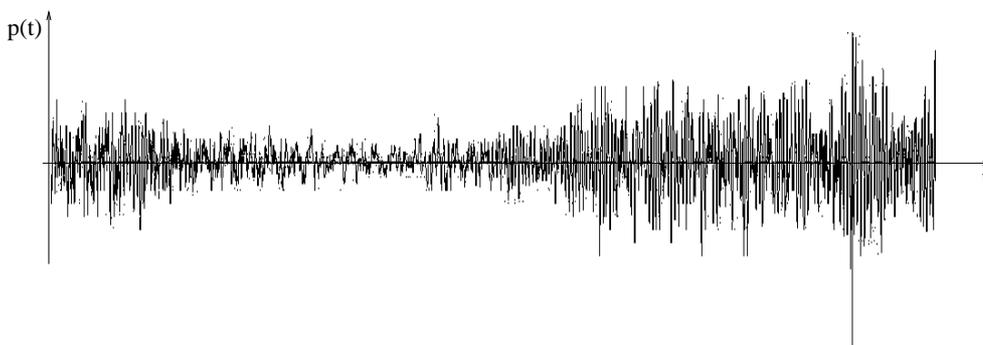


Figura 1.1 Segnale acustico.

plicata funzione  $p(t)$  il cui grafico dà la pressione acustica, in un punto dello spazio, in funzione del tempo  $t$ . Segnali che hanno il tempo come variabile indipendente si dicono *segnali temporali*, e ad essi è dedicata gran parte di questo libro.

Un secondo esempio ci viene offerto dall'immagine monocromatica di Figura 1.2, identificata dalla funzione  $L(x, y)$ , che dà la luminosità in funzione delle due coordinate spaziali  $(x, y)$ .



Figura 1.2 Immagine monocromatica.

Un segnale è un mezzo per veicolare informazione; l'informazione convogliata dal segnale può essere comunicata e utilizzata a scopo di previsione e controllo.

#### Esempio 1.1.1.

Si consideri un modello semplificato di comunicazione vocale umana: supponiamo che Tizio voglia comunicare a Caio un concetto codificato in una frase  $w$  (informazione). Possiamo riconoscere i seguenti passi:

1. Tizio genera un segnale acustico  $p_1(t)$  che veicola l'informazione  $w$ .
2. Il segnale  $p_1(t)$  si propaga nell'aria (canale) e può essere contaminato dal rumore dell'ambiente.
3. Caio riceve un nuovo segnale  $p_2(t)$ , da cui estrapolare l'informazione  $w$ ; la possibilità di ricostruire l'informazione dipende dalla "ridondanza" con cui l'informazione viene veicolata dal segnale e dal "livello" di rumore dell'ambiente.

Facendo astrazione dall'esempio precedente, in Figura 1.3 viene presentato un semplice modello di comunicazione a distanza.

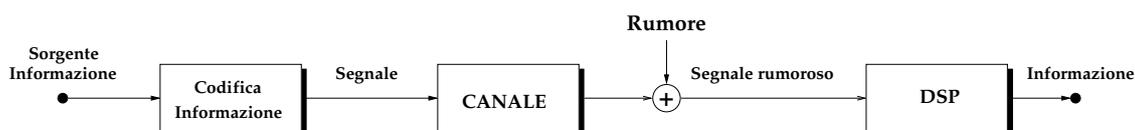


Figura 1.3 Canale con rumore.

I metodi per l'elaborazione dei segnali assumono oggi grande rilievo, poiché la capacità di elaborare o trasmettere informazioni per via automatica è una caratteristica importante dell'attuale società. L'elaborazione dei segnali trovano feconde applicazioni nelle due aree principali:

1. trasmissione, ricezione e memorizzazione efficiente ed affidabile dei segnali nelle telecomunicazioni;
2. estrazione di informazione da segnali rumorosi con tecniche di riconoscimento di forme, per previsione e controllo.

## 1.2 Classificazione dei Segnali

Il mondo che ci circonda è in gran parte basato su segnali analogici: il tempo, le coordinate spaziali, grandezze fisiche come l'intensità della luce e del suono assumono valori continui. I nostri organi sensori traducono i segnali analogici in segnali elettrici; questi vengono analizzati dal cervello che prende decisioni estraendo le informazioni veicolate. Va segnalato che in questo processo la maggior parte dei segnali ambientali viene riconosciuta come rumore di fondo e filtrata.

D'altro lato, la tecnologia digitale assume oggi grande rilievo per la sua flessibilità nelle applicazioni; è dunque ragionevole pensare di utilizzare questa tecnologia per l'elaborazione dei segnali. Il mondo analogico è tuttavia distante da quello digitale: un elaboratore lavora su una scala di tempi discreta, scandita dal clock, ed inoltre i valori che può assumere una grandezza trattata digitalmente sono finiti. La trattazione digitale dei segnali richiede dunque la soluzione di due problemi di rilievo:

1. interfacciare il mondo analogico con quello digitale;
2. dotarsi di strumenti per trattare numericamente segnali rumorosi.

A questo riguardo, è utile introdurre una semplice classificazione di segnali in segnali continui e discreti, segnali deterministici e probabilistici.

### Segnali Continui e Discreti

Generalmente un segnale può essere descritto da una funzione  $f : A \rightarrow B$ , dove gli insiemi  $A$  e  $B$  sono sottoinsiemi di spazi vettoriali di dimensione finita  $\mathbb{R}^m$ ; i valori di  $A$  si riferiscono usualmente a coordinate spaziali e/o temporali, mentre quelli in  $B$  denotano valori assunti da grandezze fisiche come pressione, tensioni, correnti. Consideriamo qui per semplicità segnali temporali del tipo  $y = f(t)$ . Abbiamo i seguenti casi:

1. La variabile  $t$  assume valori reali oppure valori in un sottoinsieme discreto di numeri reali (ad esempio i multipli interi di  $\tau$ ).

Nel primo caso il segnale sarà detto a *tempo continuo*, nel secondo a *tempo discreto*. Ad esempio, campionando il segnale a tempo continuo  $f(t)$  agli istanti  $n\tau$  si ottiene il segnale a tempo discreto  $f(n\tau)$ .

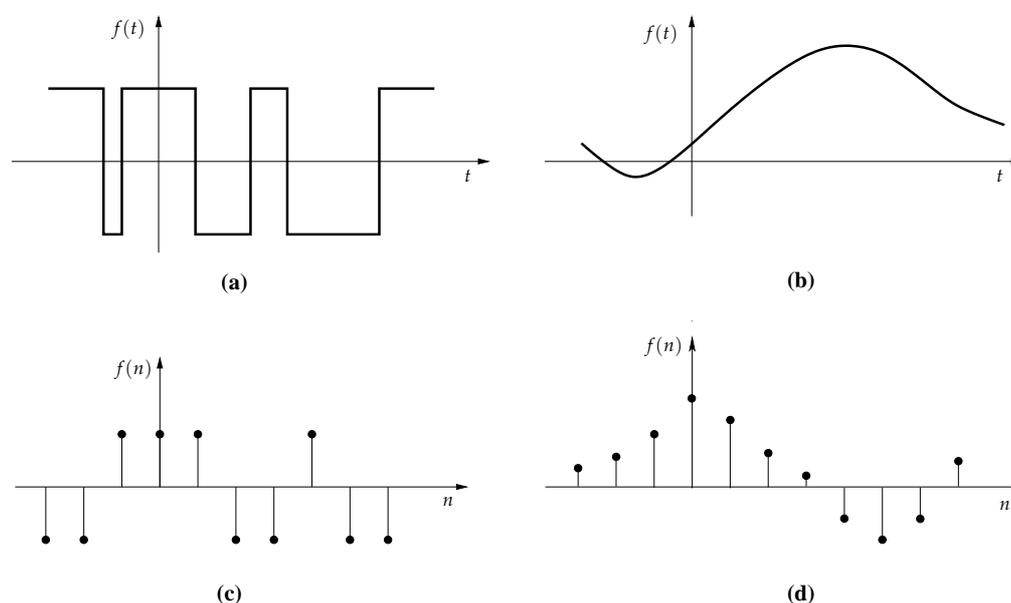
2. La variabile  $y$  assume valori reali oppure valori in un sottoinsieme finito di numeri reali (ad esempio i  $2^m$  numeri codificabili in notazione binaria con  $m$  bit).

Nel primo caso il segnale sarà detto a *valori continui*, nel secondo a *valori finiti*. Ad esempio, indicando con  $\text{sgn}(x)$  la funzione segno ( $\text{sgn}(x) = 1$  se  $x > 0$ ,  $\text{sgn}(x) = -1$  se  $x < 0$ ) il segnale  $\text{sgn}(f(t))$  risulta essere a valori finiti.

Potremo di conseguenza classificare i segnali in:

- segnali a valori continui e tempo continuo, detti anche *segnali analogici*;
- segnali a valori continui e tempo discreto;
- segnali a valori finiti e tempo continuo;
- segnali a valori finiti e tempo discreto, detti anche *segnali digitali*.

In Figura 1.4 sono illustrati vari tipi di segnale.



**Figura 1.4** (a) Segnale a valori finiti e tempo continuo. (b) Segnale continuo a tempo continuo. (c) Segnale a valori finiti e tempo discreto. (d) Segnale continuo a tempo discreto.

Riguardo ai segnali digitali, è opportuno precisare che essi sono ottenuti mediante campionamento regolare di segnali analogici dove si suppone fissato il passo di campionamento  $\tau$  e i campioni vengono ricavati ad istanti che sono multipli interi  $n\tau$  di  $\tau$ , con  $-\infty < n < \infty$ .

Definendo *tempo normalizzato* il rapporto  $t/\tau$ , un segnale digitale può essere espresso in funzione del tempo normalizzato  $n\tau/\tau = n$  in cui vengono ricavati i campioni:

$$x(n) = f(t/\tau) |_{t=n\tau}.$$

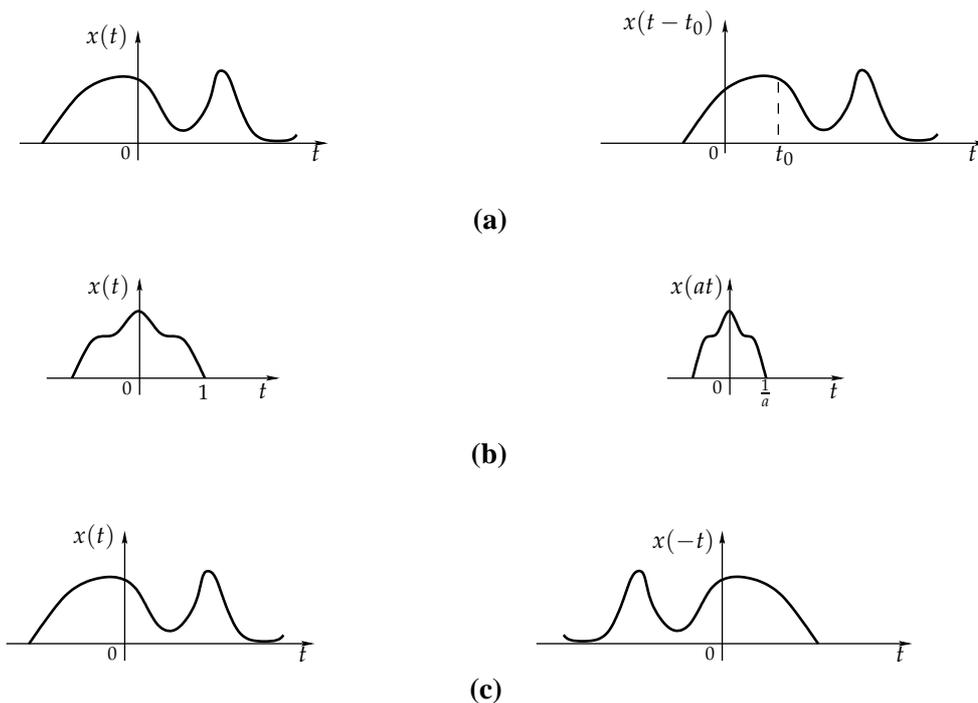
Sono svariate le ragioni per le quali si è interessati ai segnali digitali: l'elaborazione digitale è molto più versatile di quella analogica, grazie soprattutto alla memorizzazione del segnale su memorie finite; molti sistemi di comunicazione sono basati (per numerose ragioni) sulla trasmissione di segnali digitali; l'uscita di apparati digitali e sensori che misurano grandezze fisiche è rappresentata da segnali digitali; algoritmi e strategie complesse

di elaborazione di segnali, così come il controllo di sistemi fisici, richiedono hardware programmabile general purpose o specializzato (computer o digital signal processor); molta parte dell'elettronica di consumo è digitale (CD, DVD, MP3).

### 1.2.1 Segnali Notevoli

Prima di introdurre alcuni segnali fondamentali, richiamiamo tre semplici trasformazioni di segnali ottenute per cambio di variabile.

Le trasformazioni che consideriamo sono: il ritardo temporale (*traslazione*), il cambio di scala (*scalatura*) e l'*inversione* temporale, come riportato in Figura 1.5.



**Figura 1.5** (a) Segnale d'ingresso ritardato. (b) Segnale d'ingresso compresso. (c) Segnale d'ingresso invertito.

1. Fissato un tempo  $t_0$ , la traslazione trasforma il segnale  $f(t)$  nel segnale  $f(t - t_0)$ , che rappresenta lo stesso segnale ritardato di  $t_0$ .
2. Fissato un numero reale  $a > 0$ , la scalatura trasforma il segnale  $f(t)$  nel segnale  $f(at)$ . L'effetto che si ottiene in questo caso è quello di una compressione lineare (se  $a > 1$ ) o di un allungamento o rilassamento lineare (se  $a < 1$ ).
3. L'inversione temporale trasforma il segnale  $f(t)$  nel segnale  $f(-t)$  che rappresenta il segnale col tempo invertito.

Naturalmente, le trasformazioni date sopra sono estese anche ai segnali discreti in cui la variabile indipendente discreta  $n$  rappresenta gli istanti di tempo  $n\tau$  associati a segnali campionati con periodo  $\tau$ .

1. Fissato un intero  $n_0$ , la traslazione trasforma il segnale  $x(n)$  nella versione ritardata  $x(n - n_0)$ .

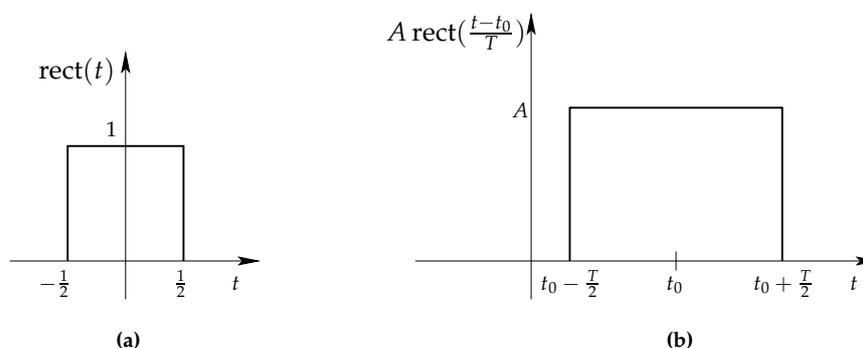
2. Fissato un numero  $a = k$  o  $a = 1/k$ , con  $k$  intero, la scalatura trasforma il segnale  $x(n)$  nel segnale  $x(an)$ . Se  $a = k$  ciò che si ottiene è un segnale in cui si preleva un campione di  $x(n)$  ogni  $k$  campioni, eliminando quelli intermedi (decimazione); se invece  $a = 1/k$  si ottiene un segnale in cui i campioni di  $x(n)$  vengono "ridistribuiti" su istanti multipli di  $k$  (interpolazione).
3. L'inversione temporale trasforma il segnale  $x(n)$  nel segnale  $x(-n)$  che rappresenta il segnale col tempo invertito.

### Impulso Rettangolare

L'impulso rettangolare unitario  $\text{rect}(t)$  è definito come:

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ed è mostrato in Figura 1.2.1(a). In Figura 1.2.1(b) è invece mostrato il grafico di



**Figura 1.6** (a) Segnale impulso rettangolare unitario. (b) Impulso rettangolare traslato e riscalato.

$A \text{rect}(\frac{t-t_0}{T})$ , un rettangolo di altezza  $A$ , base  $T$  e traslato in  $t_0$ .

### Gradino Unitario

Il gradino unitario  $u(t)$  è definito come:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

e mostrato in Figura 1.2.1(a). Il gradino traslato in  $t_0$ , è invece definito da:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > t_0 \\ 0, & \text{se } t < t_0 \end{cases}$$

e il grafico è riportato in figura 1.2.1-(b).

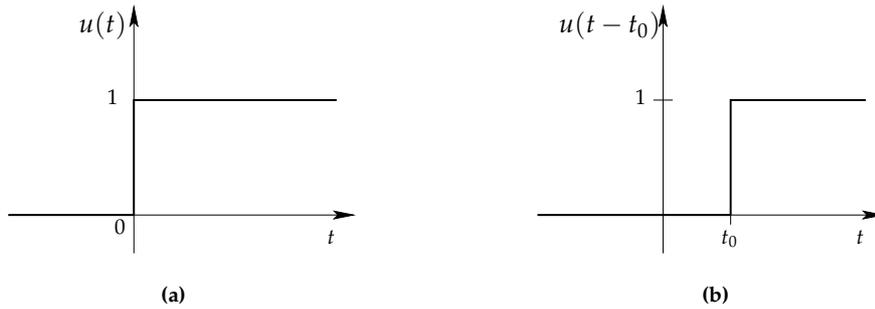


Figura 1.7 (a) Segnale gradino unitario. (b) Gradino traslato in  $t_0$ .

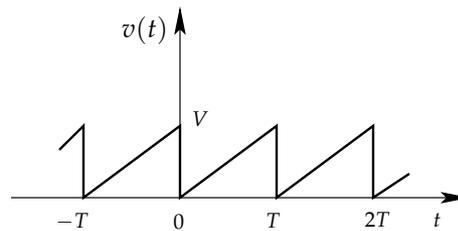


Figura 1.8 Segnale dente di sega.

### Esempio 1.2.1.

Un segnale molto usato in elettronica, per esempio per controllare la tensione del campo elettrico che dirige il fascio di elettroni del tubo catodico (CRT), è il cosiddetto segnale *dente di sega*, illustrato in Figura 1.8. L'equazione che descrive un impulso per  $0 < t < T$  di questo segnale è:

$$v_T(t) = \frac{V}{T} t [u(t) - u(t - T)] = \frac{V}{T} t \operatorname{rect} \left( \frac{1}{T} \left( t - \frac{T}{2} \right) \right).$$

Poiché il segnale è periodico di periodo  $T$ , è utile definire il segnale nell'intervallo  $T < t < 2T$  come traslazione di  $v_T(t)$ , ossia:

$$v_T(t - T) = \frac{V}{T} (t - T) \operatorname{rect} \left( \frac{1}{T} \left( t - \frac{3T}{2} \right) \right).$$

In modo analogo, il  $k$ -esimo impulso, definito per  $kT < t < (k + 1)T$ , è dato da:

$$v_T(t - kT) = \frac{V}{T} (t - kT) \operatorname{rect} \left( \frac{1}{T} \left( t - \frac{(2k + 1)T}{2} \right) \right).$$

L'equazione precedente vale per valori interi di  $k$  sia positivi sia negativi, quindi l'equazione complessiva che definisce il segnale  $v(t)$  in figura risulta:

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_T(t - kT).$$

## Impulso Unitario

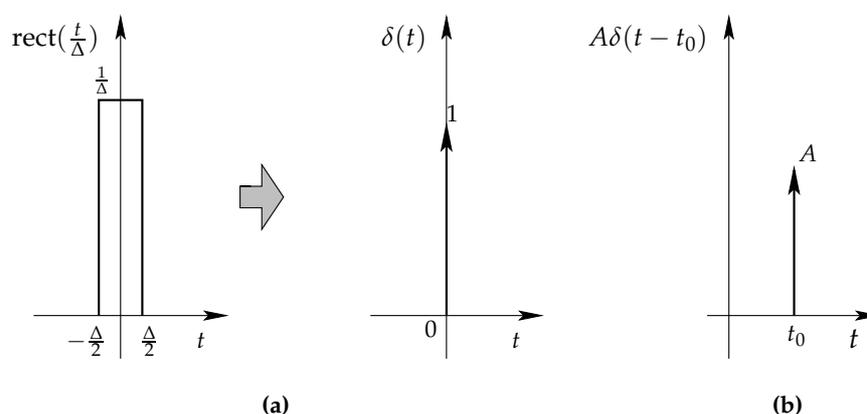
La *funzione impulso unitario* (o delta di Dirac)  $\delta(t)$  non è matematicamente descrivibile mediante una funzione, ma necessita del concetto di "distribuzione" per essere definita.

Derogando al rigore matematico, essa può essere pensata come un rettangolo di base “infinitesima”  $\Delta$  e di altezza “infinita”  $\frac{1}{\Delta}$ , in modo che l’area sottostante  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt$  sia 1. Essa non è quindi una funzione nel senso di Dirichelet, e sarà detta *funzione generalizzata*: infatti, poiché la funzione è illimitata quando  $\Delta$  tende a zero, ha senso dire che  $\delta(t) = 0$  se  $t \neq 0$  e non ha senso dire che  $\delta(0) = +\infty$  dato che  $\infty$  non è un numero.

Intuitivamente l’impulso  $\delta(t)$  può essere pensata come limite (per  $\Delta \rightarrow 0$ ) di una sequenza di funzioni non negative  $p_\Delta(t)$ , dove  $p_\Delta(t)$  è nulla al di fuori dell’intervallo  $[-\Delta/2, \Delta/2]$  e tale che  $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\Delta(x)dx = 1$ . Un esempio è mostrato in Figura 1.9(a): qui la funzione impulso è definita come il limite di un impulso rettangolare:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right).$$

La delta di Dirac viene rappresentata con una freccia verticale di altezza (o peso) 1 come in Figura 1.9(a). In Figura 1.9(b) viene invece mostrato l’impulso  $A\delta(t - t_0)$  di ampiezza  $A$  e che “occorre” al tempo  $t = t_0$ .



**Figura 1.9** (a) Impulso unitario o delta di Dirac. (a) Impulso di ampiezza  $A$  traslato in  $t = t_0$ .

Come detto, la definizione della funzione impulso non è matematicamente rigorosa e, di norma, si preferisce descrivere la funzione di Dirac in base alle sue proprietà.

Formalmente, essa assume un senso preciso solo se è all’interno di un integrale, da cui si ricava la seguente definizione:

$$\langle f, \delta \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0),$$

dove  $\langle f, \delta \rangle$  denota il prodotto scalare tra  $f(\cdot)$  e sotto l’ipotesi che la funzione  $f(\cdot)$  sia continua intorno allo zero. Segue naturalmente che, se  $f(\cdot)$  è continua in  $t = \tau$ , allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - \tau)dt = f(\tau)$$

ed anche:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = f(t).$$

Informalmente, la delta di Dirac soddisfa le proprietà:

$$\begin{aligned}\delta(t - \tau) &= 0 \quad \text{se } t \neq \tau, \\ f(t)\delta(t - \tau) &= f(\tau)\delta(t - \tau), \\ \delta(at) &= \frac{1}{|a|}\delta(t), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau)dt &= 1.\end{aligned}$$

Nella teoria dei segnali, sono molteplici gli usi che si fa della funzione impulsiva; i due principali sono: lo studio dei sistemi lineari tempo invarianti e il campionamento ideale.

Per i sistemi lineari vale il principio di sovrapposizione degli effetti, in virtù del quale, se si scompone il segnale in ingresso in opportuni segnali elementari (come la delta di Dirac) e si conosce la risposta del sistema a tali segnali, è banale calcolare la risposta all'intero segnale in ingresso, semplicemente come sovrapposizione delle risposte ai singoli segnali elementari. Questo principio verrà enunciato più avanti nel capitolo, quando si darà la definizione di sistema e sue proprietà.

Il campionamento rappresenta la selezione del valore di un segnale in un determinato istante di tempo. Questo modello basato sulla delta di Dirac, detto anche campionamento ideale, oltre a fornire le basi per la giustificazione matematica del teorema del campionamento (come vedremo nel Capitolo 4), approssima bene il comportamento reale di un sistema campionatore analogico-digitale che si presenta in molte applicazioni di interesse pratico.

### Impulso e Gradino Discreto

Due segnali discreti che giocano un ruolo determinante nello studio di sistemi a tempo discreto sono l'analogo discreto della delta di Dirac e del gradino unitario, denotati rispettivamente con  $\delta(n)$  e  $u(n)$  e illustrati in Figura 1.10.

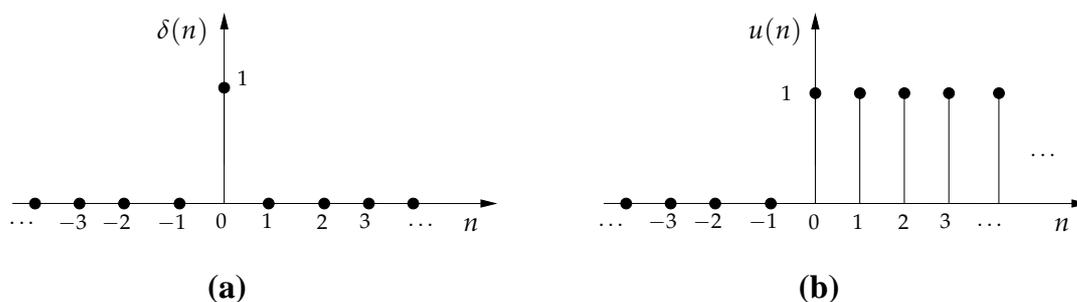


Figura 1.10 (a) Impulso discreto. (b) Gradino discreto.

L'impulso unitario discreto è definito da:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n \neq 0 \end{cases},$$

mentre il gradino unitario discreto è dato da

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{se } n < 0 \end{cases}.$$

## 1.2.2 Segnali Deterministici e Probabilistici

Supponiamo di avere una sorgente, cioè una “scatola nera” che, opportunamente sollecitata, produca un segnale  $f(t)$ . Questo ci permette di riprodurre il segnale  $f(t)$  in modo *deterministico*: una sollecitazione alla sorgente produrrà sempre lo stesso segnale. Questo termine è anche utilizzato per dare risalto al fatto che tutti i valori passati, presenti e futuri del segnale sono noti senza incertezza alcuna.

Esistono tuttavia situazioni in cui il precedente modello non risulta adeguato. Per esempio in molti casi non c'è un modo univoco per rappresentare una informazione con un segnale: la stessa parola  $w$  sarà realizzata in diversi modi da diverse persone o addirittura dalla stessa persona in diverse circostanze. Analogamente, il rumore prodotto dal passaggio di automobili su una strada pubblica non è modellabile da una sorgente deterministica.

In questi casi potremo solo costruire una sorgente che, sollecitata, produce una realizzazione  $r$  scelta arbitrariamente in un insieme di realizzazioni possibili  $R$ , dando luogo al segnale  $f(t, r)$  (*non determinismo*): va da sé che il trattamento di segnali prodotti da sorgenti non-deterministiche è soggetto a pesanti margini di incertezza. Fortunatamente, è spesso possibile assegnare la probabilità che la scatola, sollecitata, produca una data realizzazione: parleremo in questi casi di segnali *probabilistici* o *stocastici*. In questa situazione, i margini di incertezza permangono, ma almeno è possibile darne una quantificazione.

Il bagaglio matematico necessario per lo studio di detti segnali, con particolare riguardo alla modellazione del rumore, è fornito dalla teoria della probabilità e dei processi stocastici, i cui fondamenti verranno richiamati nei Capitoli 9, 10 e 11.

## 1.3 Sistemi per l'Elaborazione dei Segnali Deterministici

Un sistema fisico è un apparato che, ricevendo in ingresso un segnale dà in uscita un nuovo segnale. Più in astratto, diremo che un sistema è un

*processo per il quale esiste una relazione di ingresso-uscita o anche di causa-effetto.*

Per quanto concerne questa trattazione, la causa è rappresentata dal segnale d'ingresso, l'effetto dal segnale di uscita e la relazione da un insieme di equazioni che forniscono un *modello* per il sistema. In Figura 1.3 è data una rappresentazione grafica di un sistema che, avendo in ingresso il segnale  $f(t)$ , dà in uscita il segnale  $g(t)$ ; si dice anche che  $g(t)$  è la *risposta del sistema S* all'ingresso  $f(t)$  e si scrive

$$g(t) = S[f(t)],$$

dove  $S[\cdot]$  rappresenta una *trasformazione* e non una funzione in senso stretto, ossia un processo o un insieme di operazioni volte a trasformare il segnale d'ingresso  $f(t)$  nel segnale d'uscita  $g(t)$ .

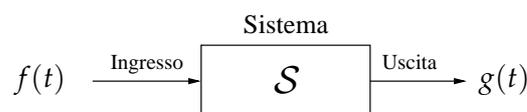


Figura 1.11 Diagramma a blocchi di un sistema a tempo continuo.

Una definizione analoga vale anche per i sistemi a tempo discreto e, in tal caso, denoteremo la relazione ingresso-uscita con il digramma a blocchi in Figura 1.3.

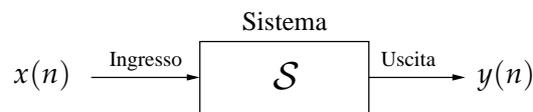


Figura 1.12 Diagramma a blocchi di un sistema a tempo discreto.

Indicando con  $\mathcal{F}_1$  l'insieme dei possibili segnali d'ingresso e con  $\mathcal{F}_2$  l'insieme dei possibili segnali d'uscita, allora la legge di trasformazione

$$S : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2,$$

fornisce una caratterizzazione completa del comportamento del sistema nel dominio del tempo, oggetto di studio in questo capitolo e che precede lo studio dei sistemi nel dominio delle frequenze che sarà l'oggetto principale dei prossimi capitoli.

### Esempio 1.3.1.

Si consideri il circuito elettrico di Figura 1.13. Il segnale di ingresso è rappresentato

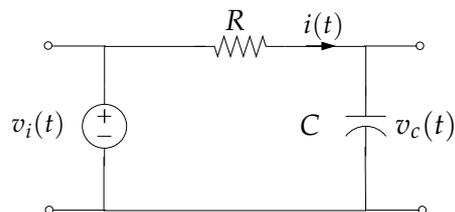


Figura 1.13 Circuito RC.

dalla tensione  $v_i(t)$  fornita dal generatore mentre la risposta o segnale di uscita è rappresentato dalla tensione  $v_c(t)$  ai capi del condensatore. Le regole che permettono di stabilire la relazione tra segnale d'ingresso e d'uscita sono date di seguito:

$$v_i(t) = Ri(t) + v_c(t), \quad (1.2)$$

dove  $R$  è la resistenza e  $i(t)$  la corrente che attraversa il circuito;

$$q(t) = Cv_c(t), \quad (1.3)$$

dove  $C$  e  $q(t)$  sono rispettivamente la capacità e la carica del condensatore.

La relazione tra la corrente  $i(t)$  e la carica  $q(t)$  è invece data da:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv_c(t)}{dt}. \quad (1.4)$$

Eliminando  $i(t)$  e  $q(t)$  in (1.2), (1.3) e (1.4), si ottiene la seguente equazione differenziale che crea una relazione tra l'ingresso e l'uscita:

$$v_i(t) = RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t).$$

Si osservi che la precedente equazione differenziale ammette, fissato l'ingresso  $v_i(t)$ , infinite soluzioni. Per identificare univocamente il comportamento del sistema occorre aggiungere quindi ulteriori richieste: un esempio è quella di causalità, come sarà discusso in seguito.

### Esempio 1.3.2.

Un importante esempio di sistema è il *Campionatore* di periodo  $\tau$  (o equivalentemente a frequenza di campionamento  $F_s = \frac{1}{\tau}$ , illustrato in Figura 1.14. Esso trasforma il segnale

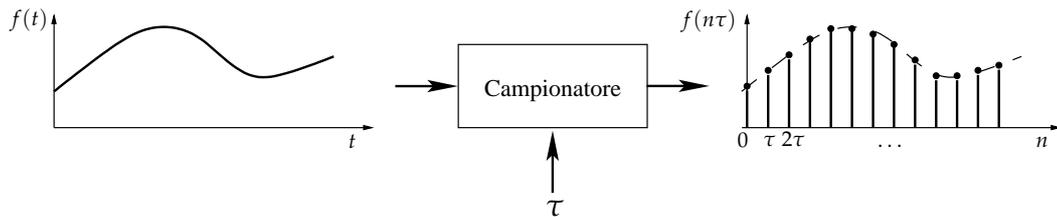


Figura 1.14 Sistema campionatore.

a tempo continuo  $f(t)$  nel segnale a tempo discreto  $f(n\tau)$ . In Sezione 4.1 sarà affrontato l'importante problema di determinare condizioni per cui il segnale  $f(t)$  è ricostruibile a partire dal segnale campionato  $f(n\tau)$ .

### Esempio 1.3.3.

Dato un insieme finito  $V = \{x_1, \dots, x_m\}$  di numeri, consideriamo la funzione  $Q$  che ad ogni reale  $x$  associa l'elemento in  $V$  più vicino ad  $x$ , cioè:

$$Q(x) = \arg \min_{x_k \in V} |x - x_k|.$$

Il sistema quantizzatore associa al segnale  $f(t)$  il segnale  $Q(f(t))$ . Esso riceve in ingresso un segnale continuo e restituisce un segnale a valori finiti. Un esempio di quantizzatore a 2 valori  $\{1, -1\}$  è dato dal sistema  $g(t) = \text{sgn}(f(t))$  mostrato in Figura 1.15.

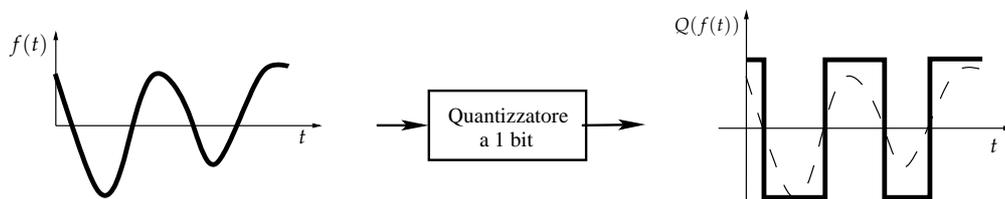


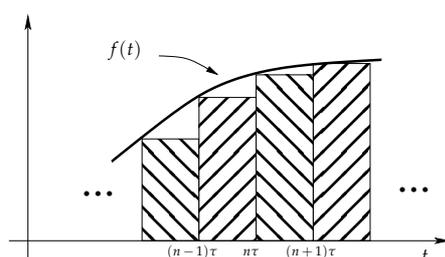
Figura 1.15 Sistema quantizzatore a 1 bit.

**Esempio 1.3.4.**

Questo esempio mostra come sia possibile trattare numericamente sistemi operanti su segnali analogici. Si consideri il sistema integratore, che associa ad un segnale analogico  $f(t)$  il segnale integrale  $g(t)$  dato da:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx.$$

Supponiamo ora di aver campionato l'ingresso  $f(t)$  ottenendo il segnale a tempo discreto  $f(n\tau)$ . Il problema è quello di determinare un sistema, che chiameremo integratore numerico, che avendo in ingresso  $f(n\tau)$  dia una risposta  $\mathcal{S}[n\tau]$  che sia una buona approssimazione di  $g(t)$ , cioè  $\mathcal{S}[n\tau] \approx g(n\tau)$ . A questo proposito ci può essere d'aiuto la regola di Eulero per approssimare  $g(t)$  mediante la somma di aree di rettangoli (vedi Figura 1.16). Vale allora:



**Figura 1.16** Regola di approssimazione dell'integrale di  $f(t)$ .

$$\begin{aligned} g(n\tau) &= \int_{-\infty}^{n\tau} f(x) dx = \int_{-\infty}^{(n-1)\tau} f(x) dx + \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} f(x) dx \\ &\approx g((n-1)\tau) + \tau f((n-1)\tau). \end{aligned}$$

Con i limiti introdotti dall'approssimazione, si ricava la seguente equazione lineare alle differenze:

$$g(n\tau) = g((n-1)\tau) + \tau f((n-1)\tau),$$

che esprime la relazione tra il segnale campionato  $f(n\tau)$  e quello di uscita  $g(n\tau)$ . Il sistema così ottenuto è un filtro IIR, al cui studio è dedicato il Capitolo 8.

Le nozioni precedenti si possono estendere al caso di sistemi con più ingressi e più uscite, come illustrato in Figura 1.17.



**Figura 1.17** Sistema con più ingressi e più uscite.

**Esempio 1.3.5.**

Il sistema Somma riceve in ingresso due segnali  $f(t)$  e  $h(t)$  e restituisce il segnale  $g(t) = f(t) + h(t)$ .

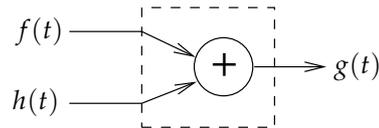


Figura 1.18 Sistema somma.

### 1.3.1 Composizionalità nei Sistemi

I sistemi “complessi” sono quelli costituiti da un gran numero di sistemi “semplici”; per poter trattare con sistemi complessi, è di grande importanza riuscire a comprenderne il comportamento di un sistema a partire da quello delle sue “componenti elementari”. Un approccio che rende agevole questo obiettivo è quello modulare: si introducono esplicitamente operazioni che trasformano due o più sistemi in un nuovo sistema, e la costruzione di un sistema complesso viene ottenuta applicando queste operazioni a sistemi semplici.

Senza pretesa di voler essere nemmeno lontanamente esaurienti, introduciamo in questa sezione le operazioni di *composizione sequenziale* (o *cascata*), *composizione parallela* e *retroazione*, mostrando su esempi la capacità di astrazione fornita dall'approccio modulare.

**Composizione sequenziale o cascata.** Dati due sistemi  $\mathcal{S}_1 : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{S}_2 : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3$ , la loro composizione è il sistema  $\mathcal{S}_3 : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_3$  ottenuta ponendo in ingresso a  $\mathcal{S}_2$  la risposta di  $\mathcal{S}_1$ .

**Composizione parallela.** Dati due sistemi  $\mathcal{S}_1 : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{S}_2 : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ , la loro composizione parallela è il sistema che ha come risposta la somma delle risposte di  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ .

**Retroazione.** Dati due sistemi  $\mathcal{S}_1 : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{S}_2 : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3$ , il sistema ottenuto per retroazione è il sistema  $\mathcal{S}_3$  che ha su ingresso  $f$  una uscita  $g$  ottenuta ponendo in ingresso a  $\mathcal{S}_1$  la differenza tra  $f$  e la risposta di  $\mathcal{S}_2$  a  $g$ .

Le operazioni introdotte sono illustrate in Figura 1.19.

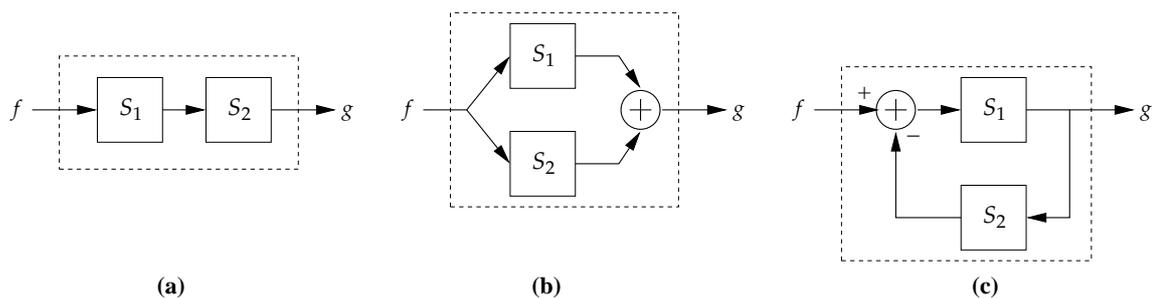


Figura 1.19 (a) Cascata. (b) Composizione parallela. (c) Retroazione.

La composizione parallela e la retroazione non sono sempre definite; ad esempio, perché si possa definire la composizione parallela deve succedere che la somma di due segnali in  $\mathcal{F}_2$  sia ancora un segnale in  $\mathcal{F}_2$ .

**Esempio 1.3.6.**

Conversione analogico-digitale. Dalla composizione sequenziale di un campionatore e di un quantizzatore si ottiene un convertitore analogico digitale (ADC), che trasforma un segnale analogico in un segnale digitale (vedi Figura 1.20).

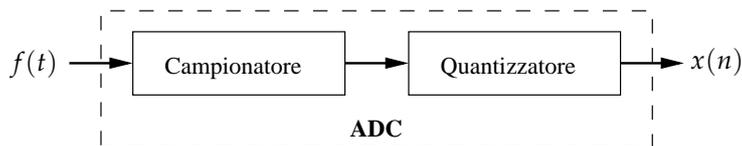


Figura 1.20 Conversione analogico-digitale.

**Esempio 1.3.7.**

Elaborazione digitale di segnali analogici e trasmissione di segnali digitali. Un convertitore analogico-digitale (ADC) è un sistema che trasforma, in modo approssimativamente fedele, segnali analogici in segnali digitali.

L'operazione inversa è compiuta dal convertitore digitale-analogico (DAC): esso trasforma un segnale digitale in un segnale analogico. Gli ADC e i DAC realizzano dunque l'interfaccia tra il mondo analogico e quello digitale e saranno oggetto di studio nel Capitolo 4. La composizione sequenziale presentata in Figura 1.21 modella il trattamento di segnali analogici con programmi eseguiti da un elaboratore digitale, mentre quella presentata in Figura 1.22 modella la trasmissione a distanza di segnali digitali utilizzando un supporto analogico.

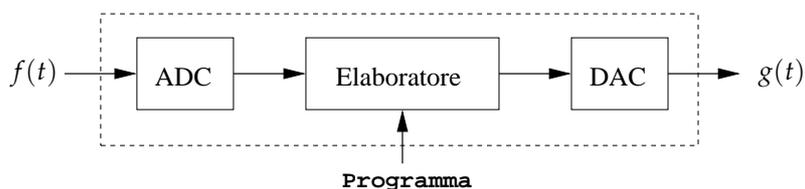


Figura 1.21 Elaborazione di segnali analogici.



Figura 1.22 Trasmissione di segnali su supporto analogico.

**Esempio 1.3.8.**

Il controllo digitale di un dispositivo analogico richiede, dato un sistema analogico da controllare (*controllato*), di determinare un opportuno sistema digitale (*controllore*) tale

che l'interazione tra i due sistemi permetta di ottenere una relazione ingresso-uscita desiderata. Nella Figura 1.23 viene rappresentato un semplice modello per il controllo digitale di un dispositivo analogico; una tipica applicazione è quella del controllo motore. L'algoritmo di controllo riceve in ingresso un segnale digitale di errore; il segnale d'uscita viene trasformato in analogico e processato dal sistema controllato. L'uscita del sistema controllato, convertita in digitale, viene posta in retroazione concorrendo alla formazione del segnale di errore.

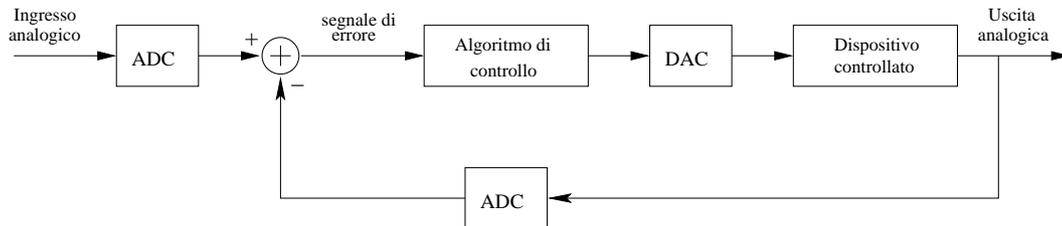


Figura 1.23 Modello di controllo digitale di dispositivi analogici.

### 1.3.2 Spazi Vettoriali di Segnali

Dati due segnali  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , la loro *somma* è il segnale  $f(t)$  ottenuto dalla sovrapposizione di  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  così definito:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

Dato il segnale  $f_1(t)$  e un numero reale  $a$ , il *prodotto* di  $f_1(t)$  per lo scalare  $a$  è il segnale  $f(t)$  ottenuto amplificando  $f_1(t)$  di un fattore  $a$ , cioè  $f(t) = af_1(t)$ . L'operazione di somma è commutativa e associativa; il segnale ovunque nullo  $0$  è tale che  $f(t) + 0 = f(t)$ ; inoltre per il segnale  $f(t)$  esiste il segnale opposto  $-f(t)$  che soddisfa  $f(t) - f(t) = 0$ .

Dati due scalari  $a$  e  $b$  vale inoltre che:

$$\begin{aligned} a(bf(t)) &= abf(t) \\ a(f_1(t) + f_2(t)) &= af_1(t) + af_2(t) \end{aligned}$$

Ne segue che l'insieme dei segnali, dotato delle operazioni sopra definite, forma uno *spazio vettoriale*.

Data una famiglia  $\{f_1(t), \dots, f_r(t)\}$  di segnali, la somma pesata

$$f(t) = a_1f_1(t) + a_2f_2(t) + \dots + a_rf_r(t) = \sum_{k=1}^r a_kf_k(t)$$

è detta *combinazione lineare*; essa rappresenta la sovrapposizione (pesata) dei segnali  $f_1(t), \dots, f_r(t)$ . Introducendo opportune nozioni di limite, questa operazione può essere estesa ad infiniti segnali, dando senso a espressioni del tipo:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_kf_k(t).$$

Data una famiglia di segnali  $\{f_1(t), \dots, f_r(t)\}$ , diremo che un segnale  $f(t)$  è *linearmente dipendente* dalla famiglia  $\{f_1(t), \dots, f_r(t)\}$  se esso può essere ottenuto come combinazione lineare dei segnali della famiglia; altrimenti viene detto *linearmente indipendente* da  $\{f_1(t), \dots, f_r(t)\}$ .

Sia  $\mathcal{F}$  un sottospazio vettoriale di segnali contenente la famiglia  $\{f_1(t), \dots, f_r(t)\}$ ; se ogni segnale  $f(t) \in \mathcal{F}$  si può ottenere come combinazione lineare di segnali della famiglia  $\{f_1(t), \dots, f_r(t)\}$ , cioè se:

$$f(t) = \sum_{k=1}^r a_k f_k(t)$$

allora  $\{f_1(t), \dots, f_r(t)\}$  è detto *insieme di generatori* di  $\mathcal{F}$ .

Inoltre, se succede che togliendo alla famiglia  $\{f_1(t), \dots, f_r(t)\}$  un qualsiasi suo elemento, il nuovo insieme non è più in grado di generare  $\mathcal{F}$ , allora diremo che  $\{f_1(t), \dots, f_r(t)\}$  costituisce una *base* per  $\mathcal{F}$ . Questo è equivalente a richiedere che ogni elemento di  $f_k(t)$  sia linearmente indipendente dai restanti. Se  $\{f_k(t)\}$  è una base per  $\mathcal{F}$  si può dimostrare che per ogni  $f(t) \in \mathcal{F}$  esiste una sola sequenza di coefficienti  $a_k$  tali che:

$$f(t) = \sum_{k=1}^r a_k f_k(t).$$

Dato un segnale  $f(t) \in \mathcal{F}$  e una base  $\{f_k(t)\}$  per  $\mathcal{F}$  risulta allora che  $f(t)$  è biunivocamente individuato dalla sequenza dei coefficienti  $a_k$ . Introducendo opportune nozioni di limite, la nozione di base può essere estesa a basi con infiniti elementi. Questo porta a definire il seguente fondamentale problema.

**Problema di analisi.** Data una base  $\{f_1(t), \dots, f_k(t), \dots\}$  per uno spazio di segnali  $\mathcal{F}$ , e un segnale  $f(t) \in \mathcal{F}$ , determinare i coefficienti  $a_1, \dots, a_k, \dots$  tali che:

$$f(t) = \sum_k a_k f_k(t).$$

Si osservi che i coefficienti  $a_1, \dots, a_k, \dots$  permettono di ottenere una rappresentazione alternativa di  $f(t)$ . Come può essere calcolata allora la sequenza di coefficienti  $a_k$ ? Una soluzione semplice ed efficace al problema di analisi esiste nel caso di *basi ortogonali*.

Per introdurre tale nozione supponiamo che sia definito un prodotto interno (prodotto scalare) tra segnali, cioè un'operazione che ad ogni coppia di segnali  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  associa un numero reale  $(f_1(t), f_2(t))$  in modo che:

1. se  $f(t)$  non è il segnale nullo, allora  $(f(t), f(t)) > 0$ ;
2.  $(af_1(t) + bf_2(t), g(t)) = a(f_1(t), g(t)) + b(f_2(t), g(t))$ .

### Esempio 1.3.9.

Consideriamo lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  formato da  $n$ -uple di numeri reali, cioè  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_k \in \mathbb{R}\}$ , con le operazioni:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ a(x_1, \dots, x_n) &= (ax_1, \dots, ax_n) \end{aligned}$$

Dati due elementi  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , l'operazione

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

è un prodotto interno. Ricordando che  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$  è la lunghezza del vettore  $\mathbf{x}$  (norma euclidea), è possibile mostrare che:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos \theta,$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra il vettore  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

### Esempio 1.3.10.

Per segnali continui definiti sull'intervallo  $[0, 1]$  la seguente operazione è un prodotto interno:

$$(f(t), g(t)) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Per i segnali a tempo discreto (con opportune condizioni che garantiscono la convergenza) la seguente operazione è un prodotto interno:

$$(f(n), g(n)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(k).$$

Una base  $\{f_1(t), \dots, f_k(t), \dots\}$  è detta *ortogonale* se  $\forall i \neq j$  risulta:

$$(f_i(t), f_j(t)) = 0$$

Da esempio 1.3.9, infatti il prodotto interno è 0 se l'angolo  $\theta$  tra i vettori è tale che  $\cos(\theta) = 0$ , cioè i vettori sono perpendicolari. Possiamo a questo punto enunciare l'importante risultato:

**Fatto 1.1.** Se  $\{f_1(t), \dots, f_k(t), \dots\}$  è una base ortogonale per uno spazio di segnali  $\mathcal{F}$ , allora ogni segnale  $f(t) \in \mathcal{F}$  è tale che:

$$f(t) = \sum_k a_k f_k(t),$$

dove

$$a_j = \frac{(f(t), f_j(t))}{(f_j(t), f_j(t))}.$$

*Dimostrazione.* Poiché:

$$(f(t), f_j(t)) = \left( \sum_k a_k f_k(t), f_j(t) \right) = \sum_k a_k (f_k(t), f_j(t)) = a_j (f_j(t), f_j(t)),$$

ricavando  $a_j$ , si ottiene il risultato. □

Se in una base ortogonale  $\{f_1(t), \dots, f_k(t), \dots\}$  vale ulteriormente che  $(f_j(t), f_j(t)) = 1$  per ogni  $j$ , la base viene detta *ortonormale*. Per basi ortonormali, il Fatto 1.1 si specializza come segue:

**Fatto 1.2.** Se  $\{f_1(t), \dots, f_k(t), \dots\}$  è una base ortonormale per uno spazio di segnali  $\mathcal{F}$ , allora ogni segnale  $f(t) \in \mathcal{F}$  è tale che:

$$f(t) = \sum_k a_k f_k(t),$$

dove

$$a_j = (f(t), f_j(t)).$$

**Esempio 1.3.11.**

Nello spazio dei segnali a tempo continuo, l'insieme delle funzioni impulso (delta di Dirac)  $\{\delta(t-x) : x \in \mathbb{R}\}$ , presentata nella Sezione 1.2.1, rappresenta una base per i segnali a tempo continuo. Infatti ogni segnale  $f(t)$  può essere espresso come combinazione lineare generalizzata di impulsi dove il coefficiente moltiplicativo di  $\delta(t-x)$  è proprio  $f(x)$ , ovvero:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x)dx.$$

Quanto detto si può dimostrare osservando per prima cosa che  $f(t)\delta(t-x) = f(x)\delta(t-x)$ , poiché  $\delta(t-x) = 0$  per  $x \neq t$ . Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(t-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-x)dx = f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-x)dx = f(t).$$

**Esempio 1.3.12.**

Per quanto riguarda lo spazio dei segnali  $x(n)$  a tempo discreto (con la condizione aggiuntiva che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) < \infty$ ). Il segnale impulso unitario  $\delta(n)$  è il segnale che vale 1 per  $n = 0$  e 0 altrimenti, cioè:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Si può osservare che la famiglia dei segnali

$$\{\dots, \delta(n+k), \dots, \delta(n+1), \delta(n), \delta(n-1), \delta(n-2), \dots, \delta(n-k), \dots\}$$

cioè  $\{\delta(n-k) | k \in \mathbb{Z}\}$ , è una base per lo spazio dei segnali a tempo discreto. Si osservi infatti che  $\delta(n-k) = 1$  se  $n = k$ , altrimenti  $\delta(n-k) = 0$ . Preso allora un qualsiasi segnale  $x(n)$ , vale:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k).$$

Ne segue che ogni segnale è esprimibile come combinazione lineare dei segnali  $\delta(n-k)$  ( $-\infty < k < \infty$ ). Per i segnali a tempo discreto un'utile nozione di prodotto interno è la seguente:

$$(x(n), y(n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n).$$

Si osserva immediatamente che la base  $\{\delta(n-k) | k \in \mathbb{Z}\}$  è una base ortogonale. Infatti:

$$(\delta(n-k), \delta(n-k)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta^2(n-k) = 1,$$

se invece  $k \neq j$ , vale che:

$$(\delta(n-k), \delta(n-j)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)\delta(n-j) = 0.$$

La nozione di combinazione lineare può essere estesa a un numero finito di segnali e, attraverso opportune nozioni di limite, anche ad infiniti segnali:

$$\sum_{k=0}^n a_k f_k(t) = a_0 f_0(t) + \cdots + a_n f_n(t),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k f_k(t),$$

$$\int_0^1 a(x) f(x, t) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} a\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}, t\right).$$

### 1.3.3 Sistemi Lineari

La linearità risulta essere estremamente importante perché consente di introdurre notevoli semplificazioni nelle operazioni di analisi e sintesi di un sistema.

La proprietà di linearità è esprimibile mediante due proprietà più semplici: la proprietà di *omogeneità* e di *additività* come richiamato nella definizione seguente.

**Definizione 1.1.** Siano  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  due spazi lineari di segnali. Un sistema  $\mathcal{S} : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  si dice lineare se soddisfa le seguenti proprietà:

**omogeneità:** per ogni segnale  $f \in \mathcal{F}_1$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$  vale

$$\mathcal{S}[af(t)] = a\mathcal{S}[f(t)] = ag(t), \quad \text{dove } g \in \mathcal{F}_2.$$

**additività:** per ogni coppia di segnali  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_1$  vale

$$\mathcal{S}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{S}[f_1(t)] + \mathcal{S}[f_2(t)] = g_1 + g_2, \quad \text{dove } g_1, g_2 \in \mathcal{F}_2.$$

Questa classe di sistemi possiede l'importante proprietà di *sovrapposizione*: se l'ingresso consiste di una somma pesata di diversi segnali, la risposta del sistema è la sovrapposizione (cioè la somma pesata) delle risposte del sistema ai singoli segnali d'ingresso.

La proprietà di sovrapposizione vale ovviamente per i sistemi continui quanto per i sistemi discreti. Ad esempio è semplice mostrare dalla definizione di linearità che se  $x_k(n)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  sono segnali di ingresso di un sistema con risposta  $y_k(n)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , allora la risposta alla combinazione lineare di questi segnali

$$x(n) = \sum_k a_k x_k(n) = a_1 x_1(n) + \cdots + a_k x_k(n) + \cdots$$

è

$$y(n) = \sum_k a_k y_k(n) = a_1 y_1(n) + \cdots + a_k y_k(n) + \cdots.$$

#### Esempio 1.3.13.

La modulazione di ampiezza MA di un segnale  $f(t)$  è realizzata moltiplicando  $f(t)$  per  $A \cos \omega t$ , cioè:

$$\text{MA}(f(t)) = A \cos \omega t \cdot f(t).$$

Essa è descritta da un sistema lineare, infatti:

$$\begin{aligned} MA(af(t) + bg(t)) &= A \cos \omega t \cdot (af(t) + bg(t)) \\ &= aA \cos \omega t \cdot f(t) + bA \cos \omega t \cdot g(t) \\ &= a \cdot MA(f(t)) + b \cdot MA(g(t)) \end{aligned}$$

#### Esempio 1.3.14.

Fissata una famiglia di funzioni  $M(t, x)$ , con  $x \in R$ , il sistema

$$\mathcal{S}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} M(t, x) f(x) dx$$

è un sistema lineare, come si può verificare direttamente.

#### Esempio 1.3.15.

La modulazione di fase MF di un segnale  $f(t)$  è descritta dal sistema

$$MF(f(t)) = \rho \cos(\omega t + f(t)).$$

Poichè in generale  $\cos(\omega t + (f + g)) \neq \cos(\omega t + f) + \cos(\omega t + g)$ , MF non è un sistema lineare.

Sia l'insieme di vettori  $\{a_1, \dots, a_n\}$  una base per lo spazio per il sistema lineare  $\mathcal{S}$ . Allora esso è univocamente definito conoscendo le risposte del sistema sugli elementi di una base. Infatti, per ogni ingresso  $x$ , dove  $x$  è ottenuto come combinazione lineare  $x = \sum_i \alpha_i a_i$  vale:

$$\mathcal{S}[x] = \mathcal{S} \left[ \sum_i \alpha_i a_i \right] = \sum_i \alpha_i \mathcal{S}[a_i].$$

Conoscendo quindi  $\mathcal{S}[a_i]$  per ogni  $i$ , riusciamo a conoscere  $\mathcal{S}[x]$  per tutti i segnali  $x$  dello spazio.

Queste considerazioni, introdotte per spazi a base finita, possono essere estese (con qualche precauzione) a spazi più generali: per esempio la "base" indicizzata su un continuo per segnali a tempo continuo e una base numerabile per segnali a tempo discreto.

Abbiamo visto come il comportamento di un sistema lineare sia univocamente definito dalla risposta del sistema su una base. Vediamo ora come questo risultato possa essere specializzato nel caso di sistemi lineari per segnali a tempo continuo. Vale il seguente:

**Fatto 1.3.** Se  $\mathcal{S}$  è un sistema lineare per segnali a tempo continuo, allora

$$\mathcal{S}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) M(t, x) dx,$$

dove  $M(t, x)$  è la risposta  $\mathcal{S}[\delta(t - x)]$  del sistema all'impulso  $\delta(t - x)$ .

*Dimostrazione.*

$$\mathcal{S}[f(t)] = \mathcal{S} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(t-x)dx \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathcal{S}[\delta(t-x)]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)M(t,x)dx.$$

essendo  $M(t,x)$  la funzione risposta del sistema  $\mathcal{S}$  alla funzione impulsiva  $\delta(t-x)$ .  $\square$

Un risultato analogo vale per segnali a tempo discreto:

**Fatto 1.4.** Se  $\mathcal{S}$  è un sistema lineare per segnali a tempo discreto, allora

$$\mathcal{S}[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)M(n,k),$$

dove  $M(n,k)$  è la risposta  $\mathcal{S}[\delta(n-k)]$  del sistema all'impulso unitario al tempo  $k$ .

### 1.3.4 Sistemi Tempo-Invarianti

Un'altra importante classe di sistemi è quella dei sistemi *tempo-invarianti*, per i quali una traslazione temporale nel segnale di ingresso produce una identica traslazione temporale nel segnale di uscita. Più precisamente:

**Definizione 1.2.** Un sistema  $\mathcal{S} : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  è tempo-invariante quando per ogni ingresso  $f(t)$ , se  $g(t) = \mathcal{S}[f(t)]$  allora  $g(t-t_0) = \mathcal{S}[f(t-t_0)]$ , per ogni  $t_0$ .

#### Esempio 1.3.16.

Il circuito RC di Figura 1.13 è un esempio di sistema tempo-invariante se i valori di  $R$  e  $C$  restano costanti nel tempo; infatti è semplice verificare che per il segnale  $v_i(t-t_0)$  vale:

$$\frac{dv_c(t-t_0)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t-t_0) = \frac{1}{RC}v_i(t-t_0)$$

Tale sistema è quindi lineare e tempo invariante.

Un test per dimostrare l'invarianza temporale è offerto dalla seguente identità

$$g(t) \Big|_{t-t_0} = g(t) \Big|_{f(t-t_0)}, \quad (1.5)$$

posto che la funzione  $g(t)$  sia espressa come funzione esplicita di  $f(t)$ . Sistemi fisici di questo tipo hanno caratteristiche (struttura, massa, temperatura, ecc.) che non variano nel tempo e che quindi risponderanno allo stesso modo in ogni istante passato, presente e futuro.

#### Esempio 1.3.17.

La modulazione di ampiezza MA data da:

$$MA(f(t)) = \rho \cos(\omega t) \cdot f(t).$$

risulta essere un sistema lineare ma non tempo invariante. Infatti

$$MA(f(t-t_0)) = \rho \cos(\omega t) \cdot f(t-t_0) \neq \rho \cos(\omega(t-t_0)) \cdot f(t-t_0).$$

**Esempio 1.3.18.**

Si consideri la funzione gradino unitario  $u(t)$  definita nella Sezione 1.2.1. Il circuito sogliatore è descritto dal sistema  $\mathcal{S}[f(t)] = u(f(t))$ . Tale sistema è tempo-invariante ma non lineare, come si verifica immediatamente.

Se  $\mathcal{S}$  è un sistema lineare tempo-invariante (LTI), il suo comportamento è completamente individuato dalla sua risposta alla funzione impulsiva  $\delta(t)$ . Infatti:

**Fatto 1.5.** Se  $\mathcal{S}$  è un sistema lineare tempo-invariante, allora

$$\mathcal{S}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(t-x)dx,$$

dove  $h(t)$  è la risposta  $\mathcal{S}[\delta(t)]$  del sistema all'impulso  $\delta(t)$ .

*Dimostrazione.* Poichè il sistema è lineare vale:

$$\mathcal{S}[f(t)] = \mathcal{S} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x)dx \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{S}[\delta(t-x)]dx.$$

Essendo inoltre tempo-invariante, se  $h(t) = \mathcal{S}[\delta(t)]$  allora  $h(t-x) = \mathcal{S}[\delta(t-x)]$ , e quindi

$$\mathcal{S}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(t-x)dx.$$

□

Un risultato analogo vale per sistemi a tempo discreto:

**Fatto 1.6.** Se  $\mathcal{S}$  è un sistema lineare tempo-invariante, allora

$$\mathcal{S}[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k),$$

dove  $h(n)$  è la risposta  $\mathcal{S}[\delta(n)]$  del sistema all'impulso unitario.

La legge che associa a due segnali a tempo continuo  $f$  e  $h$  il segnale  $\mathcal{S}[f(t)]$  di Fatto 1.5 è detta *prodotto* (o *integrale*) di *convoluzione* di  $f$  e  $h$ , ed è denotata da  $f * h$ :

$$(f * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(t-x)dx. \quad (1.6)$$

Analogamente per segnali a tempo discreto  $x(n)$  e  $h(n)$  viene definita la *somma di convoluzione* come:

$$(x * h)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

I precedenti risultati (Fatto 1.5 e Fatto 1.6), espressi in termini di convoluzione, asseriscono che la risposta di un sistema LTI a un dato segnale d'ingresso è ottenuta dalla convoluzione del segnale d'ingresso con la risposta del sistema all'impulso.

L'operazione di convoluzione gode di interessanti proprietà che si riflettono sull'analisi di sistemi composti secondo le regole di interconnessione richiamate precedentemente.

La prima che esaminiamo è la proprietà *commutativa*, che si traduce nelle seguenti espressioni:

$$f(t) * h(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(t-x)dx,$$

per il caso continuo e

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

per il caso discreto. Questa proprietà può essere verificata facilmente mediante un cambio di variabile. Per esempio, nel caso continuo ponendo  $\tau = t - x$  nella (1.6), da cui  $x = t - \tau$  e  $dx = -d\tau$ , si ha:

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(t-\tau)h(\tau)(-d\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = h(t) * f(t),$$

che, a patto di rinominare  $\tau$  con  $x$ , è uguale a  $f(t) * h(t)$  definito nella (1.6). Questo fatto rende interscambiabile ingresso e risposta all'impulso, come mostrato nel diagramma a blocchi di Figura 1.24(a).

La proprietà *associativa* asserisce che la convoluzione di tre o più funzioni è indipendente dall'ordine con cui è eseguita. Per esempio,

$$[f(t) * h_1(t)] * h_2(t) = f(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = f(t) * [h_2(t) * h_1(t)].$$

La proprietà, che può essere dimostrata passando per la definizione di convoluzione e un opportuno cambio di variabili, è esemplificata mediante il diagramma a blocchi in Figura 1.24(b), in cui si deriva che la risposta all'impulso di due sistemi in cascata è data dalla convoluzione delle singole risposte all'impulso:  $h(t) = h_2(t) * h_1(t) = h_1(t) * h_2(t)$ .

Infine, la proprietà *distributiva* è mostrata dalla seguente espressione:

$$f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t) = f(t) * [h_1(t) + h_2(t)].$$

La dimostrazione si ricava direttamente dalla definizione di convoluzione:

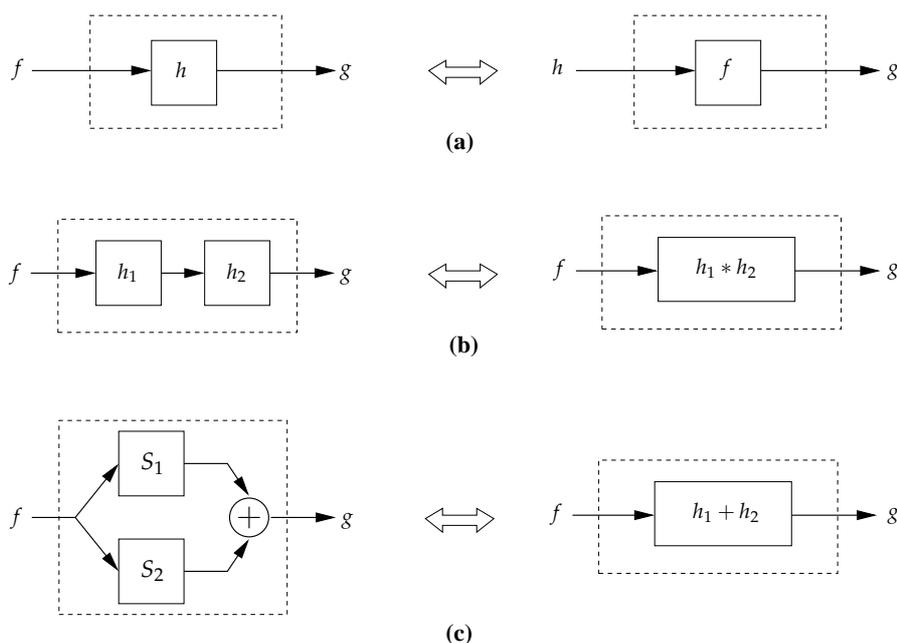
$$\begin{aligned} f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h_1(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h_2(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)[h_1(t-\tau) + h_2(t-\tau)]d\tau \\ &= f(t) * [h_1(t) + h_2(t)]. \end{aligned}$$

Due sistemi connessi in parallelo hanno risposta all'impulso uguale a quello di un sistema avente come risposta all'impulso la somma delle due:  $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ , come illustrato dal diagramma in Figura 1.24(c).

### 1.3.5 Sistemi Causali e Stabili

Un'importante condizione per la realizzabilità fisica di un sistema per il trattamento di segnali temporali è che esso sia *causale*. Intuitivamente,

*un sistema si dice causale se ad ogni istante di tempo l'uscita dipende unicamente dai valori dell'ingresso al tempo presente e ai tempi passati.*



**Figura 1.24** Proprietà della convoluzione e interconnessione di sistemi. (a) Commutativa. (b) Associativa. (c) Distributiva.

Per questo motivo un sistema causale viene anche detto nonanticipativo, nel senso che il valore della risposta al tempo  $t$  non richiede la conoscenza dei valori dell'ingresso a tempi  $t' > t$ . Come conseguenza, se due ingressi del sistema sono identici fino ad un certo istante  $t_0$ , le corrispondenti uscite devono essere uguali fino a quell'istante.

Con particolare riferimento ai sistemi lineari tempo-invariante, diremo che

*un sistema  $\mathcal{S}$  è causale se la sua risposta  $h(t)$  all'impulso è nulla per valori di  $t$  negativi, cioè quando  $h(t) = 0$  per  $t < 0$ .*

In questo caso il prodotto di convoluzione diventa:

$$\mathcal{S}[f(t)] = \int_0^{+\infty} h(x)f(t-x)dx.$$

Se un sistema LTI è causale, allora si può porre:

**caso continuo:**

$$\mathcal{S}[f(t)] = \int_{-\infty}^t f(x)h(t-x)dx = \int_0^{\infty} h(x)f(t-x)dx. \quad (1.7)$$

**caso discreto:**

$$\mathcal{S}[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k). \quad (1.8)$$

Un'altra nozione di interesse pratico è quella di *stabilità*. Ricordiamo che un segnale a tempo continuo  $f(t)$  è detto limitato se esiste  $M > 0$  tale che  $|f(t)| < M$  per ogni  $t$ . Allora diremo che

un sistema  $S$  è stabile (o BIBO, cioè Bounded Input Bounded Output) se trasforma segnali limitati in segnali limitati.

I sistemi lineari tempo-invarianti stabili sono caratterizzati da una semplice proprietà della risposta all'impulso:

**Fatto 1.7.** Un sistema lineare tempo-invariante  $S$  è stabile se e solo se, detta  $h(t)$  la risposta di  $S$  all'impulso, vale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo, per prima cosa, che  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$  e dimostriamo che il sistema è stabile. Se  $f(t)$  è limitata, cioè esiste  $M > 0$  tale che  $|f(t)| < M$  per ogni  $t$ , allora l'uscita del sistema su ingresso  $f(t)$  è il segnale  $g(t)$  tale che:

$$|g(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |f(t-\tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau.$$

Questo implica che  $g(t)$  è limitato e quindi il sistema è stabile.

Supponiamo ora che  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = +\infty$  e dimostriamo che il sistema non è stabile.

Se poniamo infatti in ingresso al sistema il segnale  $f(t) = \text{sgn}(h(-t))$  chiaramente limitato, l'uscita  $g(t)$  è tale che:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \text{sgn}(h(\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = +\infty.$$

Il sistema non risulta quindi stabile. □

Per sistemi LTI che operano su segnali a tempo discreto vale un risultato analogo:

**Fatto 1.8.** Un sistema LTI è stabile se e solo se la risposta  $h(n)$  all'impulso unitario è tale che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty.$$

Poichè la risposta all'impulso  $h(n)$  di un filtro FIR causale è tale che  $h(n) = 0$  se  $n < 0$  e  $n \geq q$  risulta:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{q-1} |h(n)| < +\infty,$$

si può concludere che i filtri FIR sono sistemi sempre stabili.

### Esempio 1.3.19.

In questo esempio studiamo la risposta all'impulso del sistema integratore (introdotto nella Sezione 1.3.4), in cui l'output  $g(t)$  è l'integrale dell'input  $f(t)$ :

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx.$$

La risposta all'impulso di tale sistema è:

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

vale a dire il gradino unitario  $u(t)$ .

Impieghiamo ora questo risultato per calcolare la risposta del sistema ai segnali d'ingresso:

$$f(t) = atu(t), \quad f(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0,$$

che rappresentano rispettivamente la rampa e l'esponenziale negativa.

Per quanto riguarda la rampa, dalla (1.7) si ricava

$$g(t) = f(t) * h(t) = a \int_{-\infty}^{+\infty} xu(x)u(t-x)dx = a \int_0^{+\infty} xu(t-x)dx$$

e, visto che

$$u(t-x) = \begin{cases} 0, & x > t \\ 1, & x < t \end{cases}$$

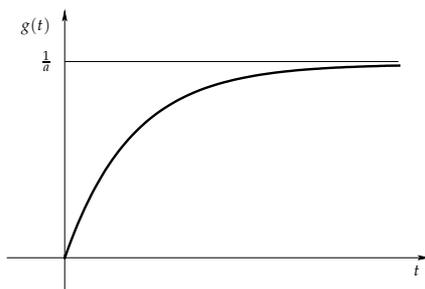
possiamo concludere che l'uscita dell'integratore con in ingresso la rampa è:

$$g(t) = a \int_0^t x dx = \frac{a}{2} t^2 u(t).$$

Per quanto riguarda invece l'esponenziale, si ha

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)u(t-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax}u(x)u(t-x)dx = \int_0^t e^{-at}dt = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t),$$

il cui grafico è mostrato Figura 1.25.



**Figura 1.25** Risposta del sistema all'input  $f(t) = e^{-at}u(t)$ .

### Esempio 1.3.20.

Determinare l'output  $y(n)$  del sistema a tempo discreto LTI con risposta all'impulso

$$h(n) = a^n u(n), \quad 0 < a < 1.$$

quando l'ingresso è il gradino unitario  $x(n) = u(n)$ .

In questo caso  $u(n)$  e  $h(n)$  sono di durata infinita e pertanto è utile eseguire la convoluzione mediante la formula  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$ . I segnali  $h(k)$  e  $x(k)$  (si noti che sono espressi nella variabile  $k$ ) sono mostrati in Figura 1.26(a,b). In particolare, il prodotto di  $x(t_0 - k)$  con  $h(t_0 - k)$  per valori di  $t_0 < 0$  dà il segnale identicamente nullo; al tempo 0 si ha invece il segnale  $y_0(k)$  di Figura 1.26(c), ottenuto dal prodotto di  $x(-k)$  con  $h(k)$ ; al tempo 1 si ottiene il segnale di Figura 1.26(f), dato dal prodotto di  $x(1-k)$  con  $h(-k)$  ecc..

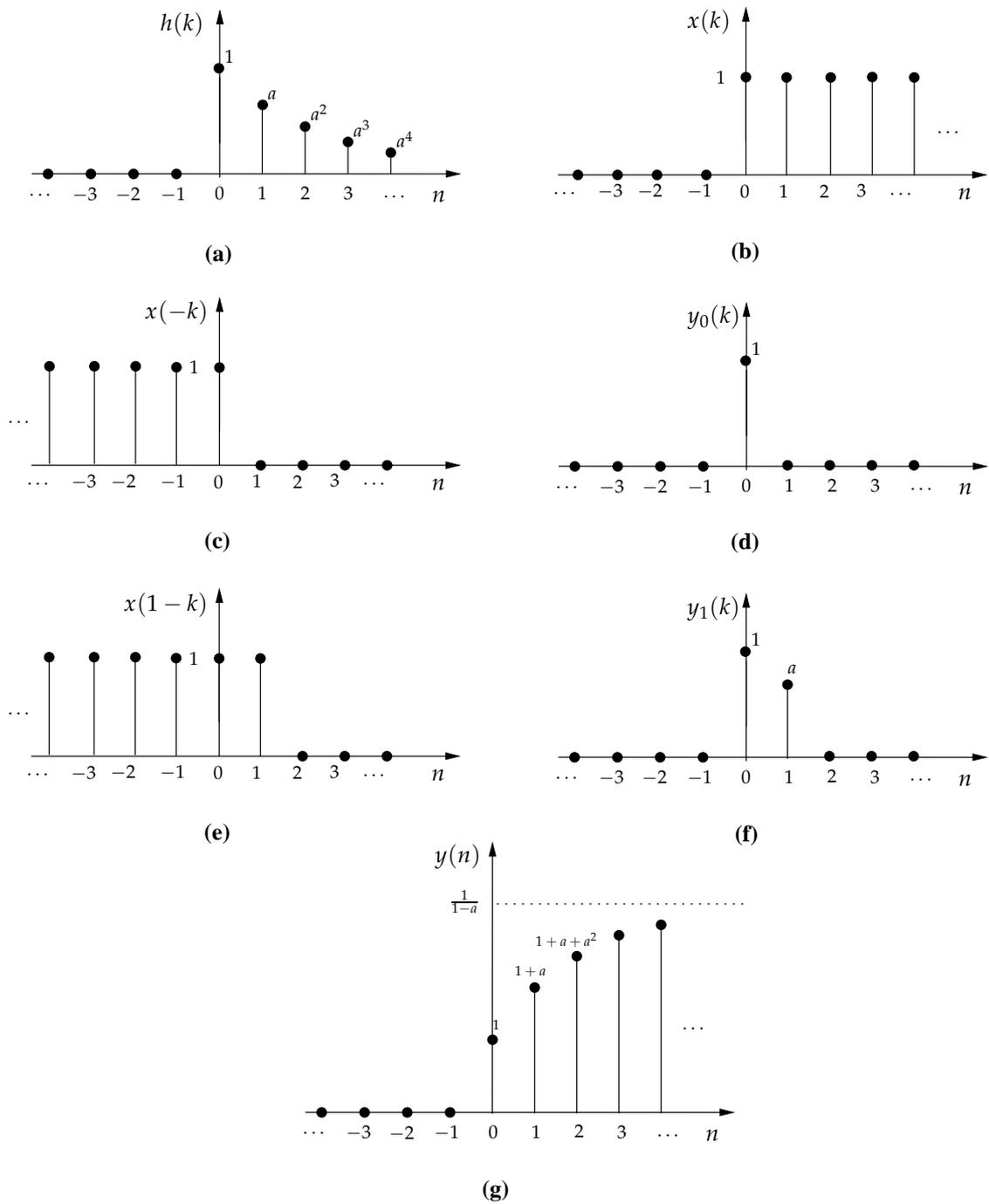


Figura 1.26 Convoluzione di  $u(n)$  e  $h(n) = a^n u(n)$ .

Per quanto riguarda il segnale d'uscita  $y$  si ha:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(1) &= 1 + a \\ y(2) &= 1 + a + a^2 \\ &\dots \\ y(n) &= 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \end{aligned}$$

Per  $n < 0$  invece il segnale è costituito da campioni nulli:

$$y(n) = 0, \quad n < 0.$$

Un grafico completo di detto segnale è illustrato in Figura 1.26(g), nel caso in cui  $0 < a < 1$ . Qui in particolare si nota il comportamento asintotico dei valori di  $y(n)$ , dove l'asintoto è rappresentato dalla somma della serie geometrica di radice  $a$ , cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \frac{1}{1 - a}.$$

## 1.4 Sistemi LTI Causali a Tempo Discreto

Nelle precedenti sezioni abbiamo presentato la fondamentale caratterizzazione del rapporto ingresso-uscita di sistemi LTI a tempo discreto mediante la somma di convoluzione; questo fatto ha contribuito a dare una rappresentazione completa della risposta del sistema in termini di risposta all'impulso unitario. Abbiamo altresì mostrato come le proprietà di causalità e stabilità siano rilevanti nell'analisi del comportamento globale di un dato sistema.

Un ulteriore raffinamento nella classificazione dei sistemi a tempo discreto deriva dalla durata della risposta all'impulso  $h(n)$  di sistemi causali: cioè durata *finita* oppure *infinita*. Parliamo nel primo caso di *sistemi FIR (Finite Impulse Response)* e nel secondo caso di *sistemi IIR (Infinite Impulse Response)*. Quindi un sistema FIR causale ha una risposta all'impulso nulla tranne che all'interno di una finestra temporale finita, cioè  $h(n) = 0$  per  $n \geq M$  per un opportuno intero  $M$ , riducendo la somma di convoluzione generale alla seguente espressione:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k). \quad (1.9)$$

Da notare che tali sistemi sono completamente descritti dal vettore  $[h(0), \dots, h(M-1)]$  visto che rappresentano i coefficienti nella combinazione lineare con i campioni di ingresso  $x(n), \dots, x(n-M+1)$ .

Al contrario, i sistemi IIR hanno una risposta all'impulso definita dalla somma di convoluzione:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

dove la causalità è anche qui assunta ma tuttavia non necessaria. Anche in questo caso si ha una combinazione lineare ove la risposta del sistema all'impulso rappresenta il peso da

attribuire ai valori del segnale, che però adesso sono in un numero infinito, posto che l'uscita dipende dall'ingresso al tempo attuale  $x(n)$  e da tutti gli ingressi ai tempi precedenti  $x(n-1), x(n-2), \dots$ .

I sistemi FIR fanno parte della più generale famiglia di sistemi detti *non ricorsivi*, perché l'uscita al tempo  $n$  dipende solamente dall'ingresso al tempo  $n$  e ai tempi precedenti, la cui uscita in generale è espressa da

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1)],$$

dove  $F$  è una funzione dei parametri  $x(n), \dots, x(n-M+1)$  che coincide con la combinazione lineare (1.9) quando il sistema è LTI.

I sistemi IIR invece, sono un sottoinsieme della famiglia dei sistemi *ricorsivi* o *retroazionati* in cui l'uscita al tempo  $n$  è determinata da un numero fissato di uscite ritardate, dall'ingresso al tempo  $n$  e da ingressi ritardati:

$$y(n) = F[y(n-1), \dots, y(n-N+1), x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1)].$$

Una differenza fondamentale tra sistemi ricorsivi e sistemi non ricorsivi, apprezzabile in determinate applicazioni, è l'ordine con il quale possono essere calcolati i vari valori di uscita: nel primo caso si è vincolati a valutare in sequenza  $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$  prima di ottenere  $y(n)$ , mentre i secondi possono essere valutati in qualunque ordine (per es.  $y(10^3), y(7), y(10^6)$ ), perché  $y(n)$  dipende solo da un numero fissato di ingressi. Un'altra questione rilevante, che evidenzia una profonda differenza tra la natura dei sistemi FIR e IIR, è quella relativa alla durata della risposta all'impulso; essa ha ripercussioni sia sul piano dell'analisi sia sul piano pratico, visto che la derivazione della risposta di sistemi IIR risulta impraticabile se calcolata mediante la somma di convoluzione perché può comportare l'uso di un numero infinito di locazioni di memoria, addizioni e moltiplicazioni. Una domanda quindi che si pone a questo punto è se sia possibile realizzare sistemi IIR con modalità differenti da quella suggerita dalla somma di convoluzione.

Nella prossima sezione viene presentata una sottoclasse dei sistemi ricorsivi (e quindi anche non ricorsivi come sottocaso) per i quali la risposta all'impulso viene calcolata senza passare attraverso la valutazione della convoluzione, molto utile soprattutto per i sistemi IIR. Essa svolge un ruolo di primo piano nella realizzazione di filtri digitali, come vedremo nel Capitolo 8.

### 1.4.1 Sistemi LTI Caratterizzati da Equazioni alle Differenze

La classe di sistemi ricorsivi descritti da *equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti* ha la forma generale:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad (1.10)$$

dove  $N \geq M$  stabilisce *ordine* dell'equazione o del sistema; di seguito assumeremo, senza perdita di generalità, che il tempo  $n \geq 0$  e che il coefficiente  $a_0 = 1$ .

I sistemi definiti implicitamente dalla (1.10), sotto opportune ipotesi sono sistemi LTI e vengono anche chiamati sistemi *auto-regressivi a media mobile* (ARMA). La relazione ingresso-uscita del sistema si esplicita solo nel caso in cui  $N = 0$ , per cui si ottiene:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k). \quad (1.11)$$

Quest'ultimo è detto sistema a *media mobile* (AM) e risulta essere LTI e FIR, con risposta all'impulso data da:

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, \dots, M; \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Nel caso più generale, quando  $N \geq 0$ , assegnato il segnale d'ingresso  $x(n)$ , al fine di determinare  $y(n)$  occorre risolvere l'equazione alle differenze (1.10); ma per fare ciò è indispensabile conoscere le *condizioni iniziali*

$$y(-1), y(-2), \dots, y(-N),$$

che rappresentano la storia passata del sistema necessaria a calcolare l'uscita presente e futura.

Si può dimostrare che la soluzione generale  $y(n)$  di un'equazione alle differenze del tipo (1.10) è data dalla somma di due componenti, chiamate rispettivamente soluzione *omogenea*  $y_H(n)$  e soluzione *particolare*  $y_P(n)$ :

$$y(n) = y_H(n) + y_P(n).$$

La soluzione omogenea viene ricavata dall'omonima equazione in cui si considera l'ingresso  $x(n)$  nullo, cioè

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0.$$

e in cui si assume che la soluzione sia in forma esponenziale, vale a dire

$$y_H(n) = \lambda^n.$$

Sostituendo  $y_H(n)$  nella (1.10), si ottiene l'equazione polinomiale

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^{n-k} = \lambda^{n-N} (\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N) = 0.$$

Il polinomio tra parentesi è chiamato *polinomio caratteristico* e ha  $N$  radici (eventualmente complesse)  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , alcune delle quali possono avere anche molteplicità maggiore di uno<sup>1</sup>. Assumendo che le radici siano tutte distinte, la soluzione dell'equazione omogenea diventa quindi:

$$y_H(n) = c_1 \lambda_1^n + \dots + c_N \lambda_N^n,$$

dove  $c_1, \dots, c_N$  sono coefficienti che vengono determinati dalle condizioni iniziali date per il sistema e non dipendono dal segnale d'ingresso  $x(n)$ .

La soluzione particolare  $y_P(n)$  deve soddisfare l'equazione generale (1.10) per uno specifico segnale d'ingresso  $x(n)$  con  $n \geq 0$ . Per trovare la soluzione particolare normalmente si ipotizza che essa abbia la stessa forma del segnale d'ingresso  $x(n)$ , cioè se quest'ultimo è un'esponenziale, si assume che la soluzione particolare sia anch'essa esponenziale; se  $x(n)$  è sinusoidale si assume che anche  $y_P(n)$  sia sinusoidale, ecc. Si procede sostituendo la soluzione ipotizzata nell'equazione generale e si determinano così le costanti moltiplicative o additive che la compongono. L'esempio che segue chiarisce meglio questa procedura.

<sup>1</sup>Nel caso in cui vi sia una radice  $\lambda_i$  con molteplicità  $m$ , si somma alla soluzione omogenea il termine  $c_1 \lambda_i^n + c_2 n \lambda_i^n + c_3 n^2 \lambda_i^n + \dots + c_m n^{m-1} \lambda_i^n$ .

Una domanda naturale che si presenta a questo punto è come calcolare la risposta all'impulso  $h(n)$  di un sistema ricorsivo a partire dall'equazione alle differenze che lo caratterizza, cioè quando l'ingresso  $x(n) = \delta(n)$ . Deriviamo questo risultato a partire da un esempio relativo all'equazione del primo ordine:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n),$$

con condizione iniziale  $y(-1)$ . Per ricavare la forma esplicita dell'uscita a partire da quella implicita espressa nell'equazione alle differenze per  $n \geq 0$ , sostituiamo ricorsivamente nell'equazione data fino a ottenere il termine generale:

$$\begin{aligned} y(0) &= ay(-1) + x(0) \\ y(1) &= ay(0) + x(1) = a^2y(-1) + ax(0) + x(1) \\ y(2) &= ay(1) + x(2) = a^3y(-1) + a^2x(0) + ax(1) + x(2) \\ &\dots \\ y(n) &= ay(n-1) + x(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^n a^k x(n-k). \end{aligned}$$

Se assumiamo la condizione iniziale nulla  $y(-1) = 0$ , intendendo per essa che il sistema è in condizione "rilassata" e privo di "stato" per tempi inferiori a zero e poniamo l'ingresso  $x(n) = \delta(n)$  allora

$$y(n) = \sum_{k=0}^n a^k \delta(n-k) = a^n, \quad n \geq 0$$

nella quale il segnale d'ingresso (qui l'impulso) appare in una somma di convoluzione con la risposta all'impulso che pertanto risulta essere:

$$h(n) = a^n u(n).$$

Nel caso generale di un'equazione alle differenze arbitraria per sistemi LTI, la risposta del sistema è espressa dalla somma di convoluzione

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(n-k)x(k), \quad n \geq 0$$

che vale  $y(n) = h(n)$  quando  $x(n) = \delta(n)$ . E poiché la risposta complessiva del sistema è data dalla somma della soluzione dell'equazione omogenea e di quella particolare, c'è da chiedersi quale sia la soluzione particolare quando l'ingresso è proprio l'impulso unitario. A tale domanda è facile rispondere dicendo che essa è nulla perché  $x(n) = 0$  per  $n > 0$ , lasciando intuire che la risposta complessiva è solamente quella dell'equazione omogenea, per la quale si ricavano i parametri  $c_1, \dots, c_N$  ponendo le condizioni iniziali a zero.

Concludiamo questa sezione sui sistemi LTI causali a tempo discreto mostrando sotto quali condizioni i suddetti sistemi sono stabili secondo la stabilità BIBO, definita nella sezione precedente.

Per quanto mostrato sopra, la risposta all'impulso del sistema descritto da un'equazione alle differenze è:

$$h(n) = \sum_{k=1}^N c_k \lambda_k^n$$

coincidente con la soluzione dell'equazione omogenea quando le condizioni iniziali sono nulle.

Ora, la stabilità BIBO richiede che la risposta all'impulso  $h(n)$  sia assolutamente sommabile, che per un sistema causale implica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^N c_k \lambda_k^n \right| \leq \sum_{k=1}^N |c_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n < +\infty.$$

Si deduce che il sistema è stabile se e solo se le radici dell'equazione caratteristica sono in modulo inferiori a uno, cioè:

$$|\lambda_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

L'esempio seguente mostra tutti questi risultati assieme.

#### Esempio 1.4.1.

Determinare la risposta del sistema descritto dall'equazione alle differenze al secondo ordine:

$$y(n) + 0,5y(n-1) - 0,24y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

quando l'ingresso è l'impulso  $x(n) = \delta(n)$  e quando  $x(n) = a^n$ , con  $a > 0$ .

**Soluzione** Dalla sostituzione di  $y_H(n) = \lambda^n$  nell'equazione otteniamo il polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + 0,5\lambda - 0,24.$$

Uguagliando il polinomio a zero si ricavano le radici reali  $\lambda_1 = -0,8$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e sostituendo nell'equazione omogenea associata si ottiene la forma generale della soluzione:

$$y_H(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n = c_1 (-0,8)^n + c_2 (0,3)^n.$$

Se l'ingresso è l'impulso  $\delta(n)$  e le condizioni iniziali sono nulle, per  $n = 0$  e  $n = 1$  dall'equazione data si ricava:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(1) &= -0,5y(0) = -0,5. \end{aligned}$$

D'altro lato, valutando negli stessi tempi  $n = 0$  e  $n = 1$  la soluzione  $y_H(n)$  ed imponendo l'uguaglianza delle due equazioni si ha il sistema:

$$\begin{aligned} 1 &= y_H(0) = c_1 + c_2 \\ -0,5 &= y_H(1) = c_1(-0,8) + c_2(0,3) \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono  $c_1 = \frac{8}{11}$  e  $c_2 = \frac{3}{11}$  e pertanto la risposta del sistema all'ingresso impulsivo è

$$h(n) = y_H(n) = \frac{8}{11}(-0,8)^n + \frac{3}{11}(0,3)^n.$$

Si può osservare che il sistema è stabile poiché soddisfa le condizioni per la stabilità BIBO, ossia  $|\lambda_1| = 0,8 < 1$  e  $|\lambda_2| = 0,3 < 1$ .

Se l'ingresso è invece il segnale esponenziale  $x(n) = a^n$ , allora dobbiamo calcolare anche la soluzione particolare che in questo caso è supposta essere della stessa forma dell'ingresso:

$$y_P(n) = c_3 a^n u(n).$$

Dopo la sostituzione nell'equazione otteniamo:

$$c_3 a^n + 0,5c_3 a^{n-1} - 0,24c_3 a^{n-2} = a^n,$$

che determina il parametro  $c_3 = \frac{a^2}{a^2 + 0,5a - 0,24}$ .

Concludiamo scrivendo la risposta complessiva del sistema quando l'ingresso è il segnale esponenziale  $a^n u(n)$ :

$$y(n) = \frac{8}{11}(-0,8)^n + \frac{3}{11}(0,3)^n + \frac{a^{n+2}}{a^2 + 0,5a - 0,24}, \quad n \geq 0.$$

## Realizzazione di Sistemi Digitali mediante Diagrammi a Blocchi

La trattazione di sistemi LTI a tempo discreto ci ha condotto allo studio di sistemi caratterizzati da equazioni alle differenze nel dominio del tempo. La forma stessa della relazione ingresso-uscita di tali sistemi suggerisce un modo (o algoritmo) pratico per la loro implementazione che passa attraverso la realizzazione di *strutture* o *reti* basate su tre sistemi fondamentali: il sistema *sommatore*, il sistema *moltiplicatore* e il *ritardo unitario*, la cui illustrazione mediante diagrammi a blocchi è data in Figura 1.27.

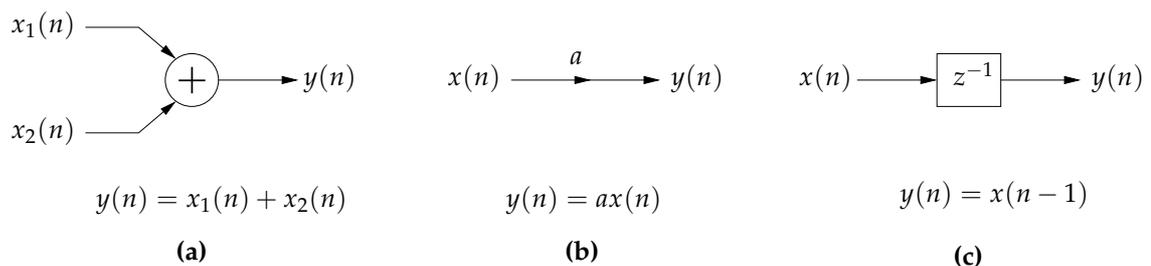


Figura 1.27 (a) Sistema sommatore. (b) Moltiplicatore per costante. (c) Ritardo unitario.

Il sistema *sommatore* esegue la somma di due segnali e ne restituisce la loro somma ad ogni istante di tempo. Si osservi che non occorre memorizzare nessun campione relativo alle sequenze da sommare e per questo viene detto *senza memoria*.

Il sistema *moltiplicatore per costante* effettua la riscalatura di un segnale in ingresso moltiplicando ogni campione per una costante data. Anch'esso è senza memoria.

Infine, il sistema *ritardo unitario* è uno speciale sistema che ritarda di un campione il segnale che lo attraversa. Infatti il campione  $x(n - 1)$  viene memorizzato al tempo  $n - 1$ , prelevato dalla memoria al tempo  $n$  e quindi restituito in uscita.

### Esempio 1.4.2.

Realizzare mediante il diagramma a blocchi sopra introdotti il sistema LTI descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(n) = 0,7y(n - 1) + 2x(n) - 3,5x(n - 1), \quad (1.12)$$

dove  $x(n)$  e  $y(n)$  sono, rispettivamente, l'ingresso e l'uscita del sistema.

I diagrammi dei sistemi mostrati in Figura 1.27 consentono di definire la struttura interna del sistema complessivo. Come si nota dalla Figura 1.28, la prima parte della composizione si occupa di realizzare la somma dei due ingressi  $x(n)$  e  $x(n-1)$  moltiplicate per i coefficienti dati. La seconda parte si occupa della somma dell'uscita ritardata di un campione, e moltiplicata per la costante, con gli ingressi appena combinati.

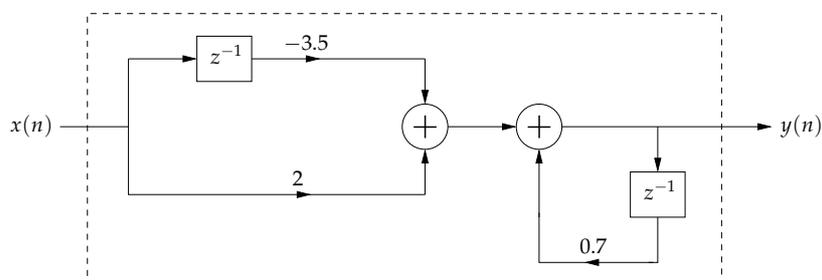


Figura 1.28 Realizzazione di un sistema LTI con diagrammi a blocchi.

Se vogliamo astrarre rispetto alla realizzazione (vedere il sistema come una “scatola nera”), possiamo guardare lo specifico sistema come “quello” che realizza il rapporto ingresso-uscita dell’equazione (1.12) e trascurare il modo col quale è stato realizzato. Tuttavia, questo atteggiamento nasconde di fatto il problema più generale di progetto efficiente di reti per la realizzazione di sistemi digitali LTI ricorsivi. Vogliamo qui introdurre due strutture di base per la realizzazione di sistemi siffatti e discuterne brevemente le differenze.

La prima struttura introdotta è la cosiddetta *forma diretta I*, ed è quella che generalizza l’Esempio 1.4.2 per equazioni della forma

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k). \quad (1.13)$$

Essa può essere vista come la cascata di un sistema non ricorsivo

$$w(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

e uno ricorsivo

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + w(n).$$

In Figura 1.29 è illustrata la struttura in forma diretta I composta da  $M + N$  ritardi,  $M + N$  somme e  $M + N + 1$  moltiplicazioni.

È stato mostrato (Sezione 1.3.4) che se invertiamo l’ordine in una cascata, il sistema LTI risultante non cambia, come mostra il seguente esempio.

#### Esempio 1.4.3.

Riprendiamo il sistema ricorsivo dell’Esempio 1.4.2 in cui l’uscita è data dall’equazione al prim’ordine:

$$y(n) = 0,7y(n-1) + 2x(n) - 3,5x(n-1).$$

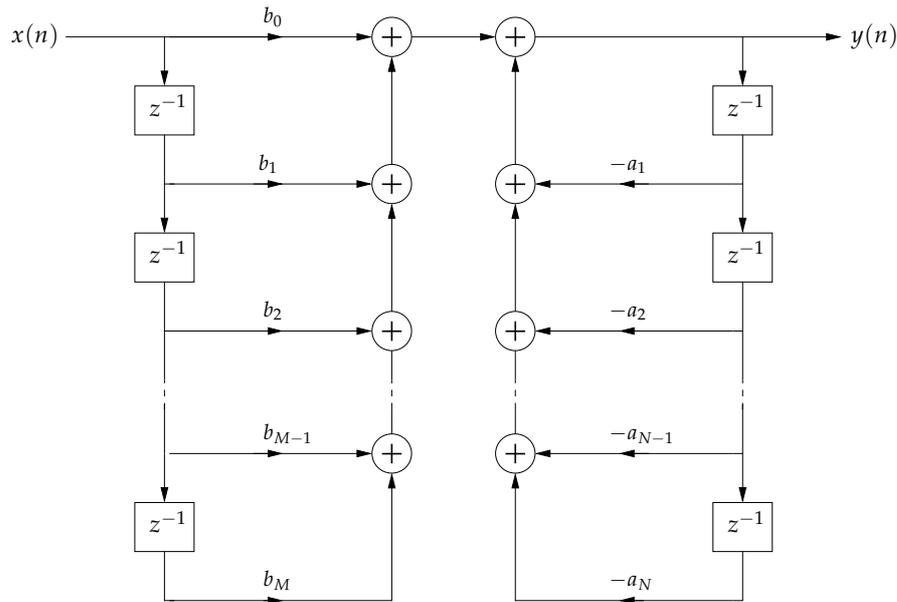


Figura 1.29 Struttura in forma diretta I che realizza un sistema LTI descritto da un'equazione alle differenze.

Se intercambiamo il sistema ricorsivo e quello non ricorsivo (applicando la proprietà vista in Sezione 1.3.4), otteniamo una struttura alternativa più "compatta", in cui i due ritardi si riducono a uno solo, come mostra la Figura 1.30. Infatti, se si considerano le equazioni ai nodi sommatore si ottiene:

$$w(n) = x(n) + 0,7w(n - 1)$$

$$y(n) = 2w(n) - 3,5w(n - 1).$$

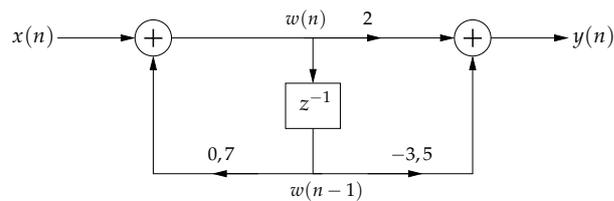
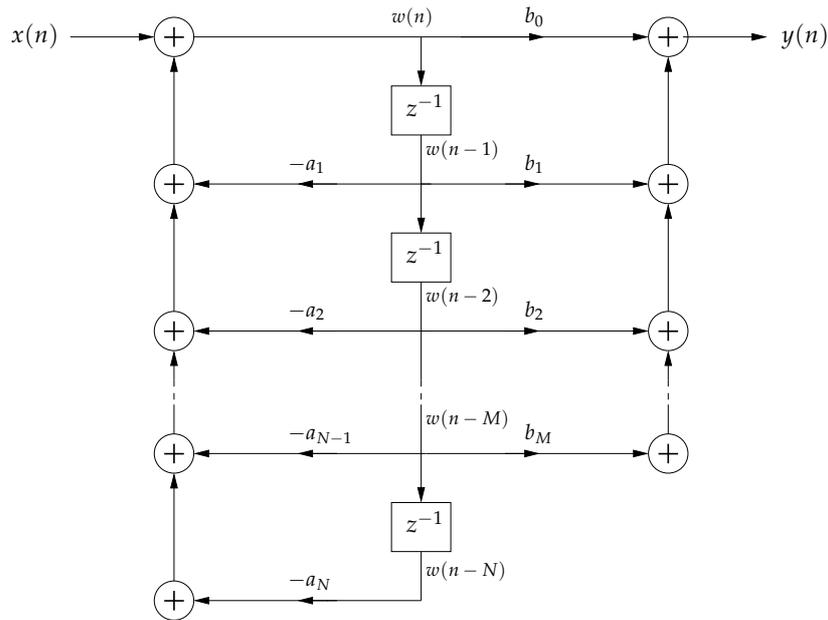


Figura 1.30 Diagrammi a blocchi con ritardi "compattati".

L'Esempio 1.4.3 mostra un algoritmo alternativo per la realizzazione della (1.13): una struttura in cui i due ritardi distinti per  $x(n - k)$  e  $y(n - k)$  della forma I collassano in uno solo, come illustrato nella Figura 1.31 (per il caso  $N = M + 1$ ).

La struttura che ottimizza il numero di ritardi è la cosiddetta *forma diretta II*, più efficiente della forma I a causa del risparmio di memoria e per questo molto utile nelle applicazioni pratiche. Generalizzando l'esempio precedente, questa struttura è una cascata di un sistema ricorsivo

$$w(n) = - \sum_{k=1}^N a_k w(n - k) + x(n)$$



**Figura 1.31** Struttura in forma diretta II che realizza un sistema LTI descritto da un'equazione alle differenze.

e uno non ricorsivo

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k w(n-k).$$

Un caso particolare lo si ottiene quando l'insieme di parametri della componente retroattiva del sistema  $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$ , dando origine a una relazione ingresso-uscita di un sistema lineare tempo-invariante FIR

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k),$$

in cui la risposta all'impulso  $h(k)$  coincide con i parametri  $b_k$ , per  $k = 0, \dots, M$ .

## Algoritmi in Matlab

### Segnali base a tempo discreto

I seguenti programmi presentano una implementazione MATLAB delle funzioni impulso unitario, gradino unitario e impulso triangolare unitario, definite su un intervallo temporale discreto  $(t_1, t_2)$  e illustrate nella Figura 1.32. È possibile definire il segnale triangolare come la finestra di Barlett trasposta in zero:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n-N|}{N}, & -N+1 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases},$$

la cui durata è  $2N - 1$ , simmetrica rispetto all'origine.

MATLAB

---

```
function [x,n] = delta(n1,n2)
% Impulso unitario (delta).
n = n1:n2;
x = double(n==0);
```

```
function [x,n] = gradino(n1,n2)
% Gradino unitario.
n = n1:n2;
x = double(n>=0);
```

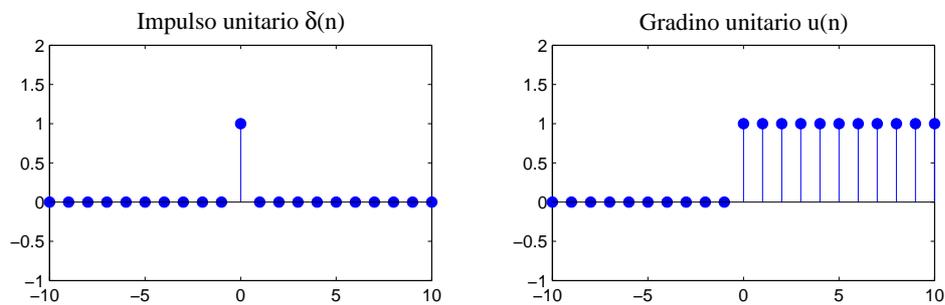


Figura 1.32 Funzioni Matlab per impulso e gradino unitari.

### Calcolo della convoluzione

IL seguente programma Matlab esegue la convoluzione tra i due segnali dati nell'Esempio 1.3.20 nel caso in cui le due sequenze siano finite. Il risultato è riportato nella Figura 1.33.

MATLAB

---

```
function conv_1(a,c)
% Convoluzione di H(n)=u(n) e x(n)=c^n, 0<=n<=a
%-----
n = 0:a;
x = c.^n;
y = conv(x,u(0,a,0));
```

```

n = 1:size(x,2)+size(n,2)-1;
stem(n-1,y,'f');
title('Convoluzione di  $\{x = u(n)\}$  e  $\{h(n) = c^n u(n)\}$ ');
xlabel('\itn'); ylabel('\itu*h');
set(gca,'YTick',[1 1/(1-c)])
hold on
plot(0:.01:size(n,2),1/(1-c),'-')

```

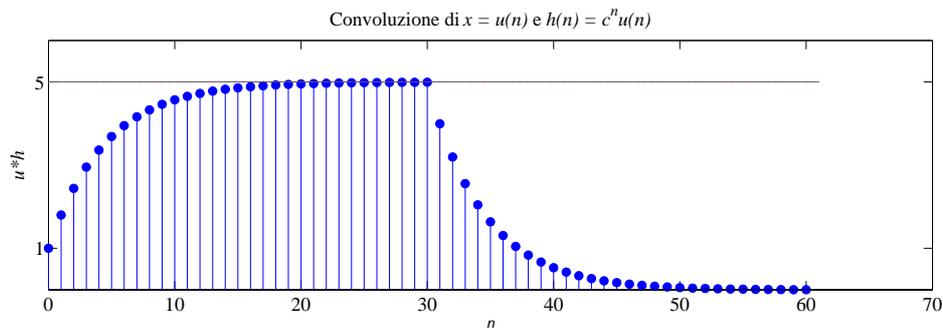


Figura 1.33 Convoluzione svolta in Matlab.

### Calcolo dell'uscita di un sistema IIR

Il seguente programma Matlab illustra l'uso della primitiva `filter` per calcolare l'uscita di un sistema descritto da equazioni alle differenze, in Figura 1.34 è riportato l'output del programma.

```

MATLAB


---


% filtro IIR - I ordine
% x(n) = u(n)
% h(n) = (0.9)^n * u(n)
% y(n) = - 0.9y(n-1) + x(n)
%
b = [1]; a = [1 -0.9];
n = -10:30;
d = delta(-10,30,0);
h = filter(b,a,d);
x = u(-10,30,0);
y = filter(b,a,x);
subplot(2,2,1); stem(n,d,'f'); title('Impulso  $\{\delta(n)\}$ ')
subplot(2,2,2); stem(n,h,'f'); title('Risposta all\'impulso  $\{h(n)\}$ ')
subplot(2,2,3); stem(n,x,'f'); title('Gradino  $\{u(n)\}$ ')
subplot(2,2,4); stem(n,y,'f'); title('Risposta al gradino  $\{y(n)\}$ ')

```

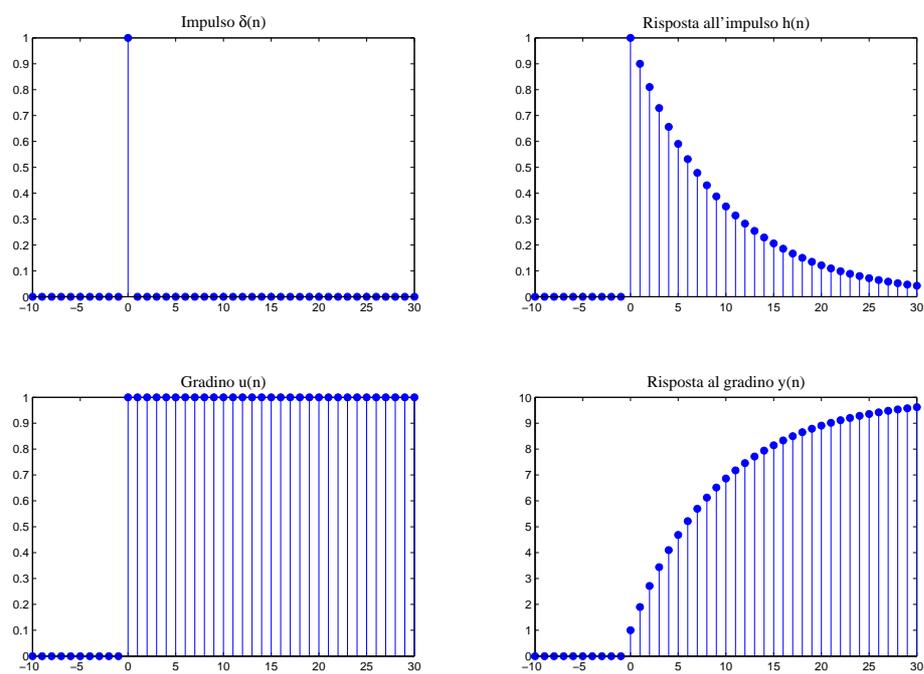
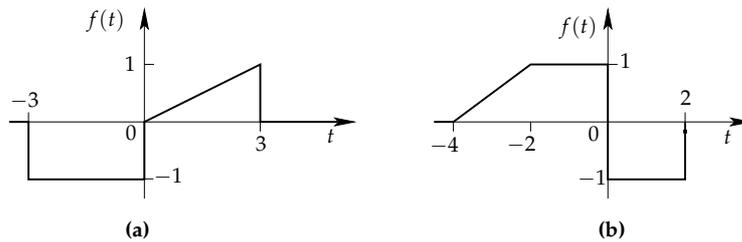


Figura 1.34 Risposta di un sistema descritto da un'equazione alle differenze del I ordine.

## Esercizi proposti

**Esercizio 1.1** Dati i segnali di Figura 1.35,



**Figura 1.35** Segnali a supporto finito.

disegnare le trasformazioni:

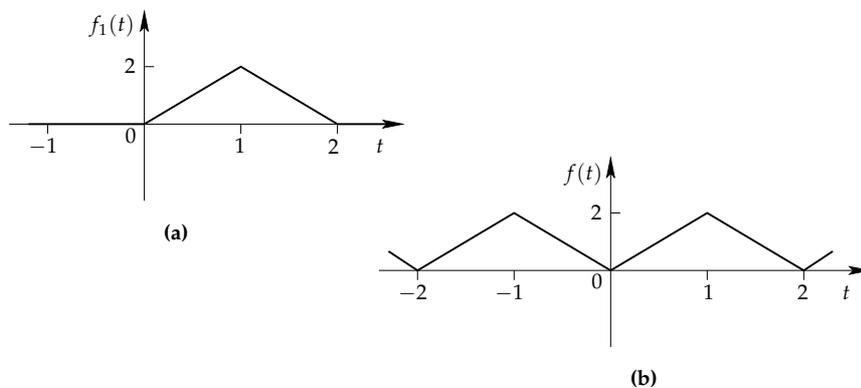
$$4f(t) - 2, \quad 2f(t) + 2, \quad 2f(2t) + 2, \quad -4f(t) + 2.$$

**Esercizio 1.2** Dato il segnale

$$f(t) = 3u(t+3) - u(t) - 3u(t-3) - 5u(t-6),$$

calcolare e disegnare il segnale  $f(-3t-6)$ .

**Esercizio 1.3** Si consideri l'impulso triangolare di Figura 1.4.1(a)



**Figura 1.36** Impulso triangolare.

1. Dare la funzione matematica per questa forma d'onda.
2. Scrivere la funzione matematica per l'onda triangolare di Figura 1.4.1(b) sfruttando il risultato precedente.

**Esercizio 1.4** Calcolare il valore di

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 10\delta(at-b)\cos^2(t-2)dt,$$

dove  $a$  è un reale positivo.

**Esercizio 1.5** Dato il sistema retroazionato riportato in Figura 1.37, ricavare la relazione tra ingresso  $x(t)$  e uscita  $y(t)$  sulla base delle trasformazioni dovute ai sistemi  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  e  $\mathcal{S}_3$ .

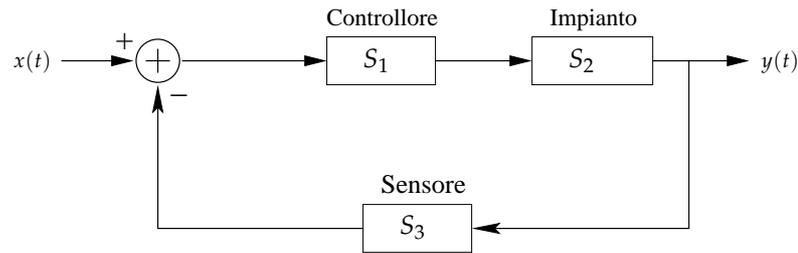


Figura 1.37 Sistema reazionato.

**Esercizio 1.6** Calcolare l'integrale di convoluzione delle seguenti coppie di funzioni:

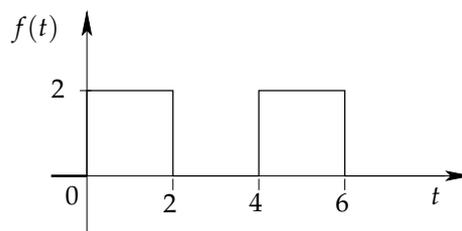
1.  $x(t) = e^{2t}u(-t)$ ,  $h(t) = u(t-3)$
2.  $x(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \leq t < 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ ,  $h(t) = 2\delta(t+1) + \delta(t+2)$ .

**Esercizio 1.7** Considerare il circuito integratore illustrato nell'Esempio 1.3.4 con risposta all'impulso  $h(t) = u(t)$ .

Mediante l'integrale di convoluzione calcolare la risposta del sistema per i seguenti segnali di ingresso:

1.  $u(t)$
2.  $u(t-3)$
3.  $(t+1)u(t+1)$
4.  $e^{5t}u(t)$ .

**Esercizio 1.8** Si supponga che il sistema  $S$  abbia risposta all'impulso  $h(t) = \text{rect}(t)$ . Disegnare il diagramma della risposta al segnale in ingresso riportato in Figura 1.4.1.



**Esercizio 1.9** Si consideri il sistema ritardo ideale:

$$g(t) = f(t - t_0).$$

Dire se il sistema è lineare, tempo-invariante, causale e stabile.

**Esercizio 1.10** Si considerino i seguenti sistemi:

1.  $g(t) = e^{f(t)}$ ,
2.  $g(t) = e^{tf(t)}$ .

Dire se sono lineari e tempo-invarianti.

**Esercizio 1.11** Determinare la stabilità e la causalità dei sistemi LTI aventi le seguenti funzioni come risposta all'impulso:

1.  $h(t) = e^{-t}u(t-1)$
2.  $h(t) = e^t u(-t+1)$
3.  $h(t) = e^{-t}u(-t-1)$
4.  $h(t) = e^t \sin(5t)u(-t)$
5.  $h(t) = e^t \cos(t-1)u(t-1)$
6.  $h(t) = e^t \cos(t+1)u(t+1)$ .

**Esercizio 1.12** Dato il sistema LTI con output

$$g(t) = \int_{-\infty}^t e^{-2(t-x)} f(x-1) dx.$$

1. Trovare la risposta all'impulso del sistema, quando cioè  $f(t) = \delta(t)$ .
2. Determinare se il sistema è stabile.
3. Determinare se il sistema è causale.

Considerare ora il sistema

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-x)} f(x-1) dx.$$

1. Trovare la risposta all'impulso del sistema, quando cioè  $f(t) = \delta(t)$ .
2. Determinare se il sistema è stabile.
3. Determinare se il sistema è causale.

**Esercizio 1.13** Un sistema LTI ha risposta all'impulso

$$h(t) = u(t+1) - u(t-1).$$

1. Determinare se il sistema è stabile.
2. Determinare se il sistema è causale.
3. Trovare la risposta del sistema quando l'ingresso è  $f(t) = \delta(t-1) - 2\delta(t+1)$ .

**Esercizio 1.14** Stabilire se valgono le proprietà di linearità, tempo-invarianza, causalità e stabilità del sistema avente la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(t) = \sin 2t x(t).$$

**Esercizio 1.15** Calcolare analiticamente e disegnare graficamente la convoluzione  $y(n)$  dei segnali

$$x(t) = \begin{cases} 0,3n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} 1, & -2 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

**Esercizio 1.16** Calcolare la convoluzione  $y(n)$  dei segnali

$$x(t) = \begin{cases} a^n, & -2 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

**Esercizio 1.17** Determinare la risposta  $y(n)$ ,  $n \geq 0$ , del sistema descritto dall'equazione del secondo ordine

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) - x(n-1),$$

quando l'input è  $x(n) = (-1)^n$  e le condizioni iniziali  $y(-1) = y(-2) = 0$ .

**Esercizio 1.18** Stabilire se valgono le proprietà di linearità, tempo-invarianza, causalità per i seguenti sistemi:

1.  $y(n) = |x(n)|$
2.  $y(n) = \frac{5x(n-1) + 2x(n-1)}{(n-3)}$
3.  $y(n) = -x(n-1) + 2x(n) - x(n+1)$
4.  $y(n) = e^{\frac{n}{2}} x(n)$
5.  $y(n) = \prod_{k=0}^6 x(n-k)$
6.  $y(n) = x(n)u(n)$
6.  $y(n) = \frac{1}{2}(x(2n) + x(2n+1))$
8.  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(k-n+2)$ .

**Esercizio 1.19** Calcolare e illustrare graficamente la risposta al gradino unitario del sistema

$$y(n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^M x(n - k).$$



## ANALISI IN FREQUENZA DI SEGNALI ANALOGICI

È noto che la luce (solare) può essere decomposta nei colori dell'arcobaleno mediante un prisma. In un articolo sottoposto nel 1672 alla Royal Society, Isaac Newton fece ricorso al termine *spettro* per descrivere la banda continua di colori prodotta da tale apparato. Più tardi, nella metà del 1800, Kirchhoff e Bunsen scoprirono che ogni elemento chimico, quando portato all'incandescenza, irradia una sua propria luce colorata, cosa che ha permesso di affermare che ogni elemento chimico è caratterizzato da una particolare linea spettrale. D'altro lato, dalla fisica sappiamo che ogni colore corrisponde a una ben determinata frequenza nello spettro del visibile. Quindi il lavoro iniziato da Newton di analisi della luce nelle sue componenti di colore è a tutti gli effetti una *analisi in frequenza*. Nell'ambito della teoria dei segnali, in luogo ai colori sprigionati dalla luce si considerano forme d'onda trigonometriche (sinusoidali) a determinate frequenze e come strumento di analisi, al posto del prisma, si impiegano noti oggetti matematici che vanno sotto il nome di *serie e trasformate di Fourier*.

Relativamente allo studio dei sistemi LTI, questo strumento ha permesso di portare un cambiamento fondamentale nella rappresentazione del segnale: invece di esprimerlo come sovrapposizione di impulsi lo si rappresenta come sovrapposizione di altri segnali-base, tra i quali spicca la base di Fourier.

Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier, governatore del Basso Egitto sotto Napoleone e

autore un monumentale trattato sulla propagazione del calore pubblicò il suo lavoro nel 1822. In questo lavoro veniva introdotto il concetto di serie di Fourier applicato a segnali periodici. La trasformata di Fourier (o integrale di Fourier) è una semplice estensione della serie che si applica a segnali arbitrari.

Per l'introduzione della trasformata di Fourier è opportuno considerare segnali a valori complessi: poiché i numeri reali sono un sottocampo dei complessi, potremo trattare i segnali reali come opportune restrizioni.

Il capitolo è suddiviso come segue. Viene richiamata brevemente la nozione di numero complesso e le principali operazioni su tali numeri. Viene poi introdotta la classe dei segnali periodici e discussa la loro espansione in serie di Fourier. Questo approccio viene esteso a segnali non periodici, definendo la trasformata di Fourier e studiandone alcune proprietà che rendono semplice la manipolazione di questo strumento.

I concetti matematici esposti vengono poi applicati all'analisi della risposta in frequenza di sistemi LTI a tempo continuo, introducendo la nozione di funzione di trasferimento. Si analizzano in particolare i filtri ideali, introducendo la terminologia relativa ed evidenziandone la non causalità. Vengono quindi trattate problematiche di analisi relative alla classe dei sistemi causali descritti da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti; questi sistemi sono particolarmente interessanti perché descrivono il comportamento di circuiti a componenti passive utilizzati per la realizzazione pratica di filtri analogici.

L'ultima parte del capitolo è dedicata allo studio della modulazione di ampiezza (AM) e frequenza (FM), di grande interesse per la trasmissione di segnali a tempo continuo.

## 2.1 Numeri Complessi

Richiamiamo qui brevemente alcune nozioni relative ai numeri complessi, la cui introduzione è stata motivata soprattutto dalla necessità di trattare compiutamente le equazioni algebriche, ma che si è successivamente rivelato anche un sistema numerico indispensabile per la rappresentazione di funzioni di variabili reali.

Un numero complesso  $z$  è identificato da una coppia di numeri reali  $(a, b)$ ; si scrive solitamente  $z = a + ib$ , chiamando  $i = \sqrt{-1}$  unità immaginaria,  $a = \operatorname{Re}\{z\}$  parte reale e  $b = \operatorname{Im}\{z\}$  parte immaginaria di  $z$ .

Le operazioni di addizione e moltiplicazione di due numeri complessi  $z$  e  $w$  sono definite nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{somma: } & (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \\ \text{prodotto: } & (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Rispetto a tali operazioni i numeri complessi formano un campo, denotato con il simbolo  $\mathbb{C}$ ; in particolare si verifica direttamente che l'inverso rispetto alla moltiplicazione è dato da:

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Il sottocampo di numeri complessi della forma  $(a, 0)$  (cioè tutti quelli che hanno parte immaginaria 0) è isomorfo al campo reale  $\mathbb{R}$ .

Poiché un numero complesso  $z = (a, b)$  è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato geometricamente come un punto di un piano. Descrivendo tale punto

in coordinate polari  $(r, \theta)$ , come mostrato in Figura 2.1, si ricava la forma *trigonometrica* di un numero complesso:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

La relazione tra coordinate polari  $(r, \theta)$  e coordinate cartesiane  $(a, b)$  è data dalla seguente

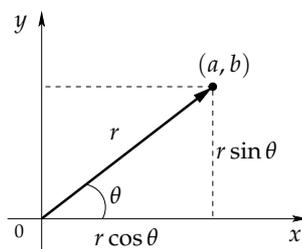


Figura 2.1 Rappresentazione geometrica del numero complesso  $a + ib$ .

coppia di equazioni:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{z\})^2 + (\operatorname{Im}\{z\})^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}}\right),$$

dove  $r$  è chiamato *modulo* di  $z$  mentre  $\theta$  è la sua *fase*; scriveremo come notazione  $r = |z|$  e  $\theta = \angle z$ .

Un'altra utile rappresentazione di un numero complesso è la cosiddetta forma *esponenziale* o *polare*:

$$z = re^{i\theta},$$

che si ottiene applicando alla forma trigonometrica la relazione di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Quest'ultima rappresentazione è utile specialmente riguardo alla moltiplicazione e alla divisione di numeri complessi. Il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso che ha come modulo il prodotto dei due moduli e come fase la somma delle due fasi:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \angle(z_1 \cdot z_2) = \angle z_1 + \angle z_2.$$

Infatti, se  $z_1 = r_1 e^{i\theta}$  e  $z_2 = r_2 e^{i\phi}$ , si ha:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r_2(\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= r_1 r_2 [\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi + i(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)] = r_1 r_2 e^{i(\theta + \phi)} \end{aligned}$$

La potenza ennesima di  $z = re^{i\theta}$  si ottiene facilmente applicando ripetutamente la formula precedente:

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

La radice  $n$ -esima di un numero complesso  $z$  è un numero  $w$  tale che  $w^n = z$ . Se  $z = \rho e^{i\theta}$  e  $w = r e^{i\psi}$ , vale allora:

$$\rho e^{i\theta} = r^n e^{in\psi}$$

Ricordando che due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e la differenza fra le fasi è multipla intera di un angolo giro, otteniamo:

$$r^n = \rho \quad \text{e} \quad n\psi - \theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Si conclude allora che un numero complesso  $\rho e^{i\theta}$  ha  $n$  radici complesse tutte con lo stesso modulo  $r = \rho^{1/n}$  e fasi  $\psi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ).

Il caso  $z = 1$  è particolarmente importante. Le radici dell'equazione  $w^n = 1$  si chiamano radici  $n$ -esime dell'unità. Posto

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

le radici  $n$ -esime dell'unità sono quindi:

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}.$$

Un'operazione importante che si può definire sui numeri complessi è quella di *coniugazione*, che consiste nel cambiare il segno alla parte immaginaria. Se  $z = a + ib$ , il *complesso coniugato* di  $z$  è il numero complesso  $\bar{z} = a - ib$ . Geometricamente  $\bar{z}$  rappresenta il simmetrico di  $z$  rispetto all'asse reale. La definizione di coniugato implica che:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2.$$

Risulta inoltre che la somma e il prodotto di numeri complessi coniugati sono sempre numeri reali; in particolare:

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} \{z\}, \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

Riassumendo, la notazione precedentemente introdotta ci consente di:

1. esprimere un numero complesso in forma esponenziale  $z = r e^{i\theta}$ ,
2. esprimere le funzioni trigonometriche mediante quella esponenziale, più semplice da manipolare:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, & e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), & \sin \theta &= \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \end{aligned}$$

## 2.2 Segnali Periodici

In questa sezione introduciamo la classe di segnali che "si ripetono periodicamente nel tempo", detti anche *segnali periodici*. Più precisamente, diremo che un segnale  $f(t)$  è periodico di periodo  $T$  se si verifica che

$$f(t) = f(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che se  $f(t)$  è periodico di periodo  $T$  allora, per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  è periodico di periodo  $kT$ , cioè  $f(t) = f(t + kT)$ ; Il minimo valore del periodo  $T > 0$  che soddisfa la definizione di periodicità è chiamato *periodo fondamentale* e denotato da  $T_0$ . Se la funzione  $f(t)$ , periodica di periodo  $T$ , risulta pertanto univocamente individuata dalla sua restrizione all'intervallo  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ , come mostrato in Figura 2.2.

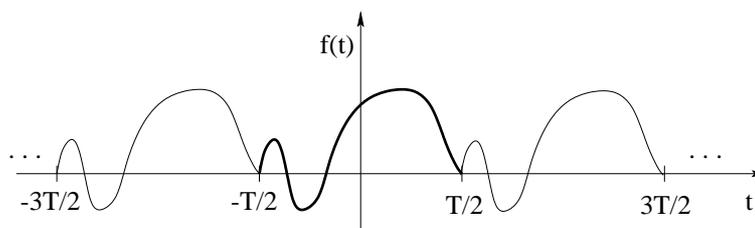


Figura 2.2 Funzione periodica di periodo  $T$ .

### Esempio 2.2.1.

Esempi importanti di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche  $\sin t$  e  $\cos t$ , che hanno periodo  $2\pi$ . Osserviamo anche che  $\sin 2\pi t$  e  $\cos 2\pi t$  sono periodiche di periodo 1. In effetti, se  $T$  è un numero positivo qualsiasi, le funzioni  $\sin \frac{2\pi}{T}t$  e  $\cos \frac{2\pi}{T}t$  sono periodiche di periodo  $T$ .

È facile verificare che la combinazione lineare di funzioni periodiche di periodo  $T$  è una funzione periodica dello stesso periodo. Si osservi inoltre che se  $f(t)$  è periodica di periodo  $T$ , allora  $f(\alpha t)$  è periodica di periodo  $T/\alpha$ . Più in generale, se  $f(t)$  è una funzione periodica di periodo  $S > 0$  allora la funzione  $g(t) = f\left(\frac{S}{T}t\right)$  è periodica di periodo  $T > 0$ . Viceversa ogni funzione  $g$ , periodica di periodo  $T$ , può essere ottenuta dalla funzione  $f(t) = g\left(\frac{T}{S}t\right)$ . In altre parole tutte le funzioni periodiche di periodo  $T$  possono essere facilmente ottenute con un semplice cambiamento di scala dalle funzioni periodiche di periodo  $S$ , con  $S$  fissato. Questo fatto, e l'importanza delle funzioni trigonometriche  $\sin t$  e  $\cos t$  giustifica la scelta di studiare prevalentemente le funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ .

Per un dato un segnale periodico  $f(t)$ , con *frequenza* del segnale si intende il numero di ripetizioni del periodo nell'unità di tempo. Se l'unità di misura del tempo è il secondo (sec), la frequenza, denotata da  $\nu$ , può essere misurata in cicli al secondo o *hertz* (Hz), oppure in radianti al secondo (rad/sec), detta anche *pulsazione* ed è denotata da  $\omega$ . Quindi un segnale  $f(t)$ , di periodo  $T$ , ha frequenza

$$\nu = \frac{1}{T} \text{ Hz,} \quad \text{oppure} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/sec.}$$

La *frequenza fondamentale* invece è definita come  $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi/T_0$  (rad/sec), mentre  $\nu_0 = 1/T_0$  è la frequenza fondamentale in hertz se  $T_0$  è il periodo fondamentale.

### Esempio 2.2.2.

Il segnale  $\cos \omega t$  ha una frequenza di  $\omega$  rad/sec oppure di  $\omega/(2\pi)$  Hz; analogamente un segnale di 6 kHz ha una frequenza di circa 38.000 rad/sec.

### Esempio 2.2.3.

Nei sistemi di comunicazione è usuale dividere le frequenze in *bande*. Una convenzione

spesso usata è quella di identificare le bande con numeri, così che la banda  $N$  è data da tutte le frequenze:

$$0.3 \times 10^N \text{ Hz} < \text{banda } N < 3 \times 10^N \text{ Hz} .$$

Ad esempio, la banda 6 va da 300 kHz a 3 MHz.

Per quanto riguarda la classificazione sono state individuate le seguenti bande:

- le frequenze audio occupano le bande 2,3,4 (30 Hz ÷ 30 kHz);
- le frequenze video occupano le bande 1,2,3,4,5,6,7 (fino a 30 MHz);
- le microne occupano le bande 8,9,10,11 (30 MHz ÷ 300 GHz).

La banda 5 è anche detta LF (bassa frequenza), la banda 6 è detta MF (media frequenza), la banda 7 è detta HF (alta frequenza), la banda 8 è detta VHF e la banda 9 è detta UHF. Le usuali trasmissioni radio in modulazione di ampiezza avvengono nella banda MF(6), quelle in modulazione di frequenza nella banda VHF (8).

### Segnale Sinusoidale ed Esponenziale Complesso

Un *segnale sinusoidale* si ottiene per dilatazione/compressione e/o traslazione di una funzione seno ed è definito dalla seguente espressione:

$$f(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi), \quad -\infty < t < \infty$$

dove  $A$  indica l'ampiezza del segnale,  $\omega_0$  la frequenza e  $\phi$  è la fase iniziale, ossia la fase al tempo  $t = 0$ . In Figura 2.2 è mostrato un segnale sinusoidale ottenuto dalla proiezione sull'asse verticale del vettore di modulo  $A$  con origine nel centro degli assi che ruota in senso antiorario ad una velocità angolare (frequenza)  $\omega_0$  e con fase iniziale  $\phi$ . Un segnale cosinusoidale, invece, è la proiezione del moto sull'asse orizzontale. L'unica differenza nella forma d'onda di seno e coseno è uno sfasamento reciproco pari a  $\pi/2$  e spesso useremo il termine sinusoidale per indicare entrambe le funzioni.

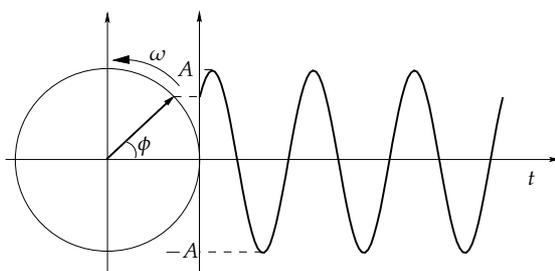


Figura 2.3 Grafico del segnale sinusoidale.

Un *segnale esponenziale complesso*, detto anche *fasore*, è un segnale della forma

$$f(t) = A e^{i(\omega_0 t + \phi_0)}, \quad -\infty < t < \infty$$

dove  $A > 0$  è un reale che rappresenta l'ampiezza,  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  è la pulsazione, misurata in rad/sec e  $\phi_0$  è la fase iniziale, misurata in rad. Il segnale  $e^{i\omega_0 t}$  è periodico con periodo  $T_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  e frequenza  $\omega_0$  rad/sec o  $\frac{\omega_0}{2\pi}$  Hz; il suo modulo è uguale a 1 e la fase è uguale a  $\omega_0 t$ .

Il fasore è un segnale che assume valori complessi, e pertanto non può essere rappresentato in funzione del tempo su un convenzionale diagramma cartesiano  $(t, f)$ . Tuttavia, anche se il segnale  $Ae^{i(\omega_0 t + \phi_0)}$  non ha diretto significato fisico, esso può essere ottenuto come combinazione di segnali sinusoidali:

$$Ae^{i(\omega_0 t + \phi_0)} = A \cos(\omega_0 t + \phi) + iA \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

Viceversa, i segnali reali  $\cos(\omega_0 t + \phi_0)$  e  $\sin(\omega_0 t + \phi_0)$  possono essere ottenuti come combinazioni lineari dei fasori  $e^{i(\omega_0 t + \phi_0)}$  e  $e^{-i(\omega_0 t + \phi_0)}$ :

$$\cos(\omega_0 t + \phi_0) = \frac{1}{2} \left( e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} + e^{-i(\omega_0 t + \phi_0)} \right) \quad (2.1)$$

$$\sin(\omega_0 t + \phi_0) = \frac{1}{2i} \left( e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} - e^{-i(\omega_0 t + \phi_0)} \right). \quad (2.2)$$

La frequenza è, per definizione, una quantità intrinsecamente positiva, posto che rappresenta essenzialmente il numero di ripetizioni (cicli) per unità di tempi di una data forma d'onda. Tuttavia, per motivi di convenienza matematica, si introducono anche le frequenze negative visto che i segnali sinusoidali (2.1) e (2.2) sono espressi come combinazione di due esponenziali complessi coniugati (fasori) aventi ugual modulo e velocità angolari di valore opposto  $\pm\omega_0$ .

## 2.3 Risposta in Frequenza dei Sistemi LTI

L'importanza delle funzioni esponenziali complesse nello studio dei sistemi LTI risiede nel fatto che la risposta di un sistema LTI sollecitato da questo tipo di segnale è lo stesso esponenziale complesso variato in ampiezza, cioè:

$$e^{i\omega t} \longrightarrow H(\omega)e^{i\omega t}$$

dove il fattore  $H(\omega)$  è in generale una funzione complessa nella variabile  $\omega$ .

Per provare questa proprietà si consideri un sistema LTI con risposta all'impulso  $h(t)$ . Per ogni ingresso  $f(t)$  possiamo determinare l'uscita mediante l'uso dell'integrale di convoluzione; quindi se  $f(t) = e^{i\omega t}$  avremo che l'uscita  $y(t)$  è:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

Assumendo che l'integrale sia definito, la risposta del sistema all'ingresso  $e^{i\omega t}$  è dunque della forma

$$y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

dove

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \quad (2.3)$$

La funzione  $H(\omega)$ , che compare nell'equazione (2.3), viene chiamata *risposta in frequenza* o *funzione di trasferimento* del sistema.

Come vedremo di seguito,  $H(\omega)$  è la trasformata di Fourier della risposta all'impulso  $h(t)$ , il che mostra l'interesse dello studio della trasformata di Fourier per l'analisi dei sistemi LTI.

## 2.4 Serie di Fourier

Nel precedente capitolo abbiamo introdotto, nell'ambito dello studio di sistemi LTI, la rappresentazione di segnali come combinazione lineare di impulsi opportunamente traslati. In questa sezione esploriamo una rappresentazione alternativa (ristretta qui a segnali periodici ed estesa a quelli non periodici nella prossima sezione) basata sulla combinazione lineare di segnali esponenziali complessi.

A tal proposito si considerino le funzioni (fasori di modulo unitario):

$$e^{in\omega_0 t} = e^{in\frac{2\pi}{T}t}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

aventi come frequenza fondamentale  $n\omega_0$  e quindi con periodo  $T = \frac{2\pi}{n\omega_0}$ . Sotto condizioni di regolarità (note come condizioni di Dirichlet, esposte alla fine della sezione) che sono verificate per la maggior parte dei segnali di interesse pratico, è possibile mostrare che una funzione  $f(t)$  periodica di periodo  $T$ , può essere ottenuta combinando linearmente le funzioni  $e^{in\omega_0 t}$  ( $-\infty < n < \infty$ ):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (2.4)$$

La serie precedente è detta sviluppo in *serie di Fourier* di  $f(t)$  e il coefficiente  $c_n$  è detto *coefficiente di Fourier*; i termini corrispondenti a  $n = \pm 1$ , entrambi con frequenza  $\omega_0$ , sono detti *prime armoniche*, quelli corrispondenti a  $n = \pm k$  sono detti *k-esime armoniche*. Invece, per  $n = 0$  si osservi che

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} f(t) dt$$

rappresenta la media temporale del segnale relativo a un periodo. Le equazioni (2.4) prendono rispettivamente il nome di *equazione di sintesi* ed *equazione di analisi* della serie di Fourier. In particolare, la prima consente di costruire o sintetizzare il segnale  $f(t)$  sovrapponendo i singoli fasori della rappresentazione, la seconda consente di decomporre o analizzare il segnale, nel senso che consente di calcolare i coefficienti complessi  $c_n$  della sua rappresentazione come somma di fasori.

Presentiamo ora alcune forme alternative per la serie di Fourier, utili soprattutto per segnali  $f(t)$  a valori reali. Se  $f(t)$  è reale, il coefficiente generale  $c_n$  è complesso ed è uguale al coniugato di  $c_{-n}$ , cioè  $c_n = \bar{c}_{-n}$ . Questo fatto ci consente di derivare una forma alternativa della serie di Fourier che spesso sostituisce quella espressa dall'equazione (2.4). Infatti, riarrangiando la somma nella (2.4) e sostituendo  $c_{-n}$  con  $\bar{c}_n$  otteniamo:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n} e^{-in\omega_0 t}] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\omega_0 t} + \bar{c}_n e^{-in\omega_0 t}] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\omega_0 t} + \overline{c_n e^{in\omega_0 t}}] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{ c_n e^{in\omega_0 t} \}. \end{aligned}$$

Se esprimiamo  $c_n$  in forma polare come  $c_n = r_n e^{i\theta_n}$ , la precedente equazione diventa:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ r_n e^{i(n\omega_0 t + \theta_n)} \right\} = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n). \quad (2.5)$$

L'equazione (2.5) è nota come *forma trigonometrica combinata* della serie di Fourier.

Un'altra forma utile è ottenuta riscrivendo  $c_n$  in forma algebrica  $c_n = a_n - ib_n$ , con  $a_n$  e  $b_n$  reali. Ricordando che  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ , la (2.5) assume la forma

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]. \quad (2.6)$$

L'equazione (2.6) rappresenta la serie di Fourier in *forma trigonometrica* e coincide con la formulazione originale di Fourier che scrisse per l'appunto in termini di somme di seni e coseni.

#### Esempio 2.4.1.

Si consideri il seguente segnale periodico di periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ :

$$f(t) = 10 + 3 \cos \omega_0 t + 5 \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{6}) + 4 \sin 3\omega_0 t.$$

Sostituendo i seni e i coseni con le esponenziali complesse:

$$f(t) = 10 + \frac{3}{2} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] + \frac{5}{2} [e^{i(2\omega_0 t + \frac{\pi}{6})} + e^{-i(2\omega_0 t + \frac{\pi}{6})}] + \frac{4}{2i} [e^{i3\omega_0 t} - e^{-i3\omega_0 t}]$$

o, equivalentemente:

$$f(t) = 10 + \frac{3}{2} e^{i\omega_0 t} + \frac{3}{2} e^{-i\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i2\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} e^{-i2\omega_0 t} - 2ie^{i3\omega_0 t} + 2ie^{-i3\omega_0 t}$$

I coefficienti della serie di Fourier per il segnale  $f(t)$  sono dunque:

$$\begin{aligned} c_0 &= 10, & c_1 &= c_{-1} = \frac{3}{2}, & c_2 &= \frac{5}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right), \\ c_{-2} &= \frac{5}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right), & c_3 &= -c_{-3} = -2i. \end{aligned}$$

Tutti gli altri coefficienti risultano nulli.

#### Esempio 2.4.2.

Un segnale che riveste un'importanza notevole nei computer digitali (segnale di clock) è il *treno di impulsi rettangolari*. Dato  $T_1 < \frac{T}{2}$ , l'onda rettangolare di periodo  $T$  è definita come segue:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

il cui grafico è rappresentato nella Figura 2.4.

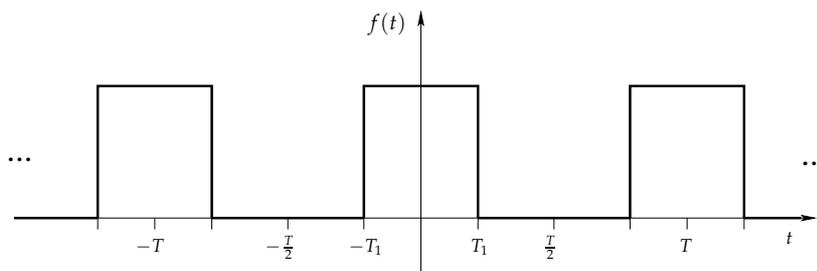


Figura 2.4 Treno di impulsi rettangolari.

La sua frequenza è  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Per determinare i coefficienti della serie di Fourier di  $f(t)$  consideriamo l'intervallo  $-T/2 \leq t \leq T/2$  ed eseguiamo l'integrazione come indicato nella (2.4). Per  $n = 0$  abbiamo

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}.$$

Per  $n \neq 0$  invece otteniamo

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-in\omega_0 t} dt = -\frac{1}{in\omega_0 T} e^{-in\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} \\ &= \frac{1}{in\omega_0 T} (e^{in\omega_0 T_1} - e^{-in\omega_0 T_1}) \\ &= \frac{2 \sin(n\omega_0 T_1)}{n\omega_0 T} = \frac{\sin(n\omega_0 T_1)}{n\pi} \quad (\text{poiché } \omega_0 T = 2\pi). \end{aligned}$$

## Spettro di Frequenza

Ogni segnale periodico ha una propria "identità" caratterizzata dalle armoniche costituenti la serie di Fourier associata: si parla in questo caso di *spettro di frequenza*. Lo spettro di frequenza di un segnale viene spesso mostrato mediante un grafico che illustra, per ogni coefficiente della serie  $c_n = |c_n|e^{i\theta_n}$ , l'ampiezza o il modulo  $|c_n|$  e la fase  $\theta_n$ .

Per esempio, per mostrare lo spettro di frequenza del treno di impulsi rettangolari descritto sopra, è utile introdurre una funzione continua che fornisce l'involuppo del modulo dei coefficienti, ossia la funzione sinc definita come:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Essa assume il valore unitario in  $x = 0$  (che si ricava dal limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ) e zero in corrispondenza dei multipli positivi e negativi di  $\pi$ ,  $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ . La fase è invece nulla per valori positivi della funzione e  $\pi$  (o  $-\pi$ ) per valori negativi. I grafici del modulo e della fase della sinc sono riportati in Figura 2.5

Lo spettro di frequenza dei coefficienti della serie che esprime il treno di impulsi rettangolari di periodo  $T$  dell'esempio precedente è rappresentato nella Figura 2.6. Nella figura è rappresentato anche l'involuppo del modulo dei coefficienti dato dalla funzione

$$\text{involuppo} = \frac{2T_1}{T} \text{sinc}(\omega T_1),$$

dove  $\omega$  sostituisce  $n\omega_0$ .

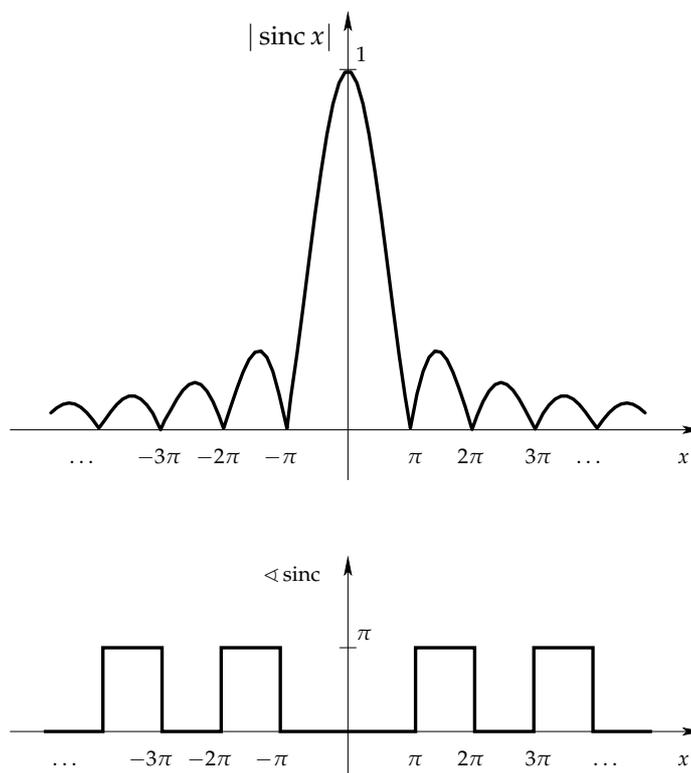


Figura 2.5 Modulo e fase della funzione sinc.

### Proprietà della Serie di Fourier

La prima osservazione da fare concerne la caratterizzazione della famiglia di funzioni che ammettono una rappresentazione come serie di Fourier: a questo riguardo si può asserire che ogni funzione  $f_T(t)$  periodica di periodo  $T$  che soddisfa le *condizioni di Dirichlet* può essere espansa in serie di Fourier. Tali requisiti sono:

1.  $f_T(t)$  deve avere al più un numero finito di discontinuità nel periodo;
2.  $f_T(t)$  deve avere al più un numero finito di massimi e minimi nel periodo;
3.  $f_T(t)$  deve essere limitata, e per includere le funzioni impulsive, tale richiesta viene estesa a quella di assoluta integrabilità per la funzione, ossia:

$$\int_T |f_T(t)| dt < +\infty.$$

Per ogni funzione  $f(t)$  che rispetta le condizioni di Dirichlet, le seguenti asserzioni risultano vere.

1. La serie di Fourier converge ai valori della funzione in ogni punto  $p$  di continuità indipendentemente dai valori assunti dalla derivata destra e dalla derivata sinistra nel punto, quindi anche nel caso in cui le derivate differiscono, cioè  $f'(p^-) \neq f'(p^+)$ .

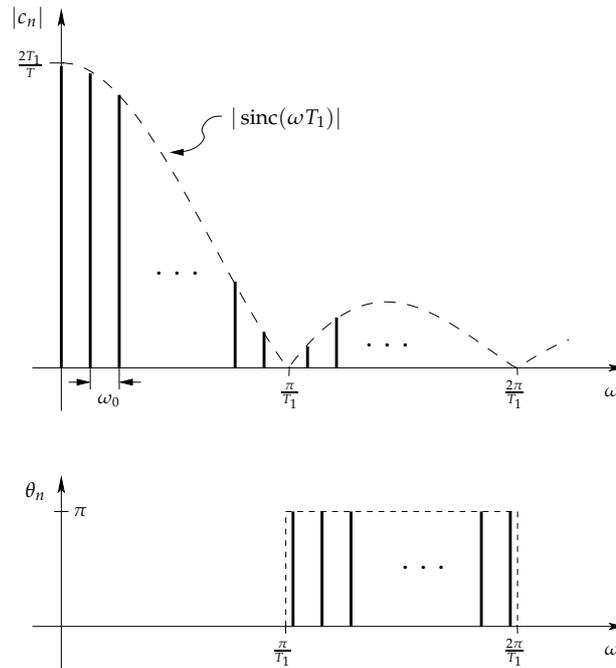


Figura 2.6 Spettro dell'onda rettangolare di periodo  $T$ .

2. Se la funzione ha una discontinuità in un punto  $p$ , la serie converge al valor medio del limite sinistro e limite destro della funzione in quel punto, cioè

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \frac{f(p^-) + f(p^+)}{2}.$$

3. Un problema interessante, con ricaduta in particolare sul piano applicativo, è quello di valutare il grado di approssimazione della funzione  $f(t)$  introdotto dalla restrizione del numero di infiniti termini della serie ad un numero finito di componenti armoniche, cioè alla somma parziale:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega_0 t}.$$

Lo studio della qualità dell'approssimazione è ridotto allora allo studio della convergenza nelle serie di Fourier. Senza fare una trattazione matematica rigorosa, diremo semplicemente che un fenomeno studiato in questa teoria (noto come fenomeno di Gibbs) è quello per cui in presenza di discontinuità, la successione delle somme parziali converge in ogni punto, ma non uniformemente. Ad esempio, nella Figura 2.7 viene illustrata la convergenza alla serie  $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_n e^{int}$ , dove  $S(t)$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita come:

$$S(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & 1 < |t| < \pi \end{cases}.$$

Come si nota dalla figura, esiste un valore  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $N$ :

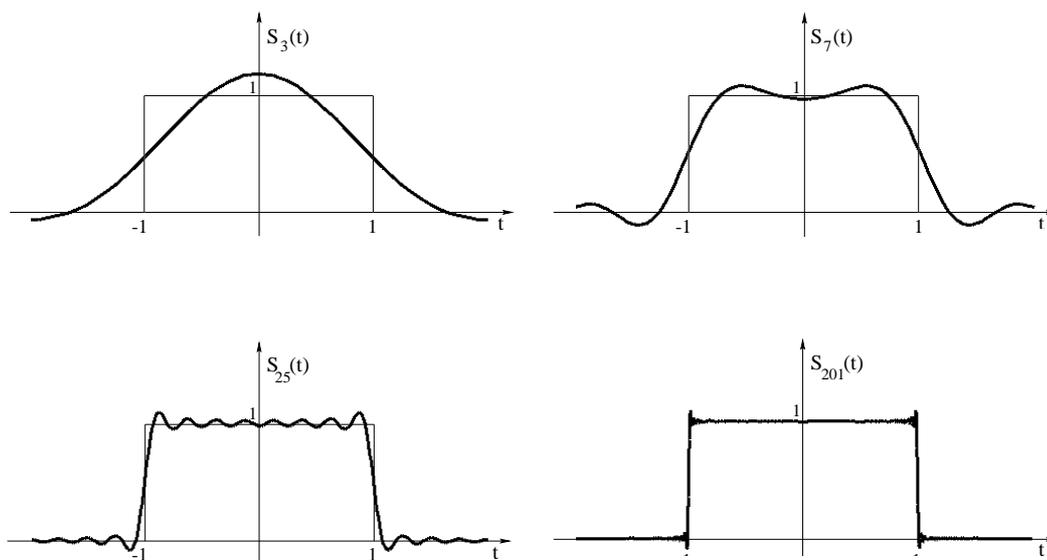


Figura 2.7 Convergenza della serie di Fourier e fenomeno di Gibbs.

$$\sup_{-\pi < t < \pi} |S(t) - S_N(t)| \geq \delta.$$

Si osservi dalla stessa figura che i punti  $t_N$ , per cui  $|S(t_N) - S_N(t_N)| \approx \delta$ , per  $N$  grande sono prossimi ai punti di discontinuità di  $S(t)$ .

4. In relazione alla proprietà precedente, se denotiamo con

$$e(t) = f(t) - S_N(t)$$

l'errore di approssimazione introdotto dalla somma parziale  $S_N(t)$ , allora è possibile dimostrare che la scelta dei coefficienti di Fourier  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$  rappresentano per la serie armonica la miglior scelta in termini di minimizzazione dello scarto quadratico medio (MSE):

$$\text{MSE} = \int_T |e(t)|^2 dt.$$

## 2.5 Trasformata di Fourier

In questa sezione si affronta il problema di rappresentare mediante funzioni trigonometriche segnali *non periodici*; e poiché è intuibile che essi non possono essere ottenuti come sovrapposizione di funzioni con frequenza multipla di una frequenza data (da cui si possono generare solo segnali periodici) ci si affida ad un procedimento più sofisticato noto come la teoria della *trasformata di Fourier*. Rispetto alle serie di Fourier è qui richiesto un approccio più generale e alcune modifiche sostanziali:

- occorre integrare su tutti i tempi da  $-\infty$  a  $+\infty$  anziché su un intervallo limitato e conseguentemente, dalle medie integrali relative alle diverse armoniche adesso si deve passare agli integrali;

- per rappresentare il segnale occorre un “continuo” di armoniche e non una famiglia discreta delle stesse, con conseguente sviluppo integrale in luogo a sviluppo in serie.

Sulla base di tali osservazioni, la trasformata di Fourier può essere vista come limite di una serie di Fourier applicabile a funzioni non periodiche di cui, nel seguito, ci apprestiamo a dare una giustificazione matematica.

A questo riguardo si consideri una funzione  $f(t)$  e si denoti con  $f_T(t)$  la funzione periodica di periodo  $T$  che coincide con  $f(t)$  nell'intervallo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ; possiamo allora scrivere:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t).$$

Un esempio è dato nella Figura 2.8(a), in cui la funzione  $f_T(t)$  è rappresentata da un treno di impulsi rettangolari di periodo  $T$  e ampiezza dell'impulso  $2T_1$ , che richiama quella mostrata nell'Esempio 2.4.2. Nella stessa figura 2.8-(c) è mostrata anche la funzione  $f(t)$ .

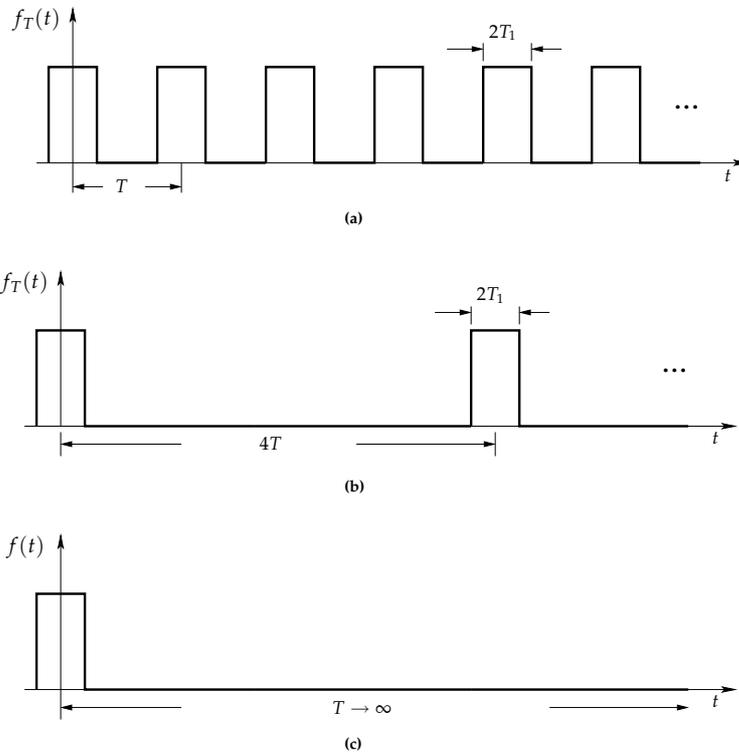


Figura 2.8 Funzione impulso rettangolare con periodo che tende all'infinito.

Posto ora

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T} \quad \text{e} \quad \Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T},$$

da cui si ricava  $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ , per la (2.4) vale:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

Passando al limite per  $T \rightarrow +\infty$  e combinando le due espressioni di analisi e sintesi per  $f_T(t)$ , si ha:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-i\omega_n(\tau-t)} d\tau \right) \Delta\omega. \quad (2.7)$$

In altri termini, quando  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \omega_n = \omega$ , cioè i valori  $\omega_n$  coprono con continuità tutte le frequenze sull'asse reale e la loro separazione  $\Delta\omega$  diviene infinitesima. Come conseguenza, l'integrale che appare tra parentesi nella (2.7) dipende con continuità dalla variabile  $\omega$  e può essere scritto come:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-i\omega_n(\tau-t)} d\tau = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{i\omega t}, \quad (2.8)$$

Se denotiamo con  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$  e osserviamo che al tendere di  $T$  all'infinito la frequenza  $\Delta\omega$  diventa il differenziale  $d\omega$  mentre la sommatoria nella (2.7) diventa una somma integrale, si ricava la coppia:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{e} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.} \quad (2.9)$$

Questo processo di dilatazione del periodo rendendo la frequenza infinitesimale e tale che la funzione  $f(t)$  non sia mai ripetuta, è rappresentata in Figura 2.8.

La coppia di funzioni  $F(\omega)$  e  $f(t)$  date nella (2.9) vengono chiamate rispettivamente *trasformata di Fourier* (equazione di analisi) e *antitrasformata di Fourier* o *trasformata inversa di Fourier* (equazione di sintesi), e vengono denotate rispettivamente con  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  e  $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$ . Inoltre la (2.9) mostra che la corrispondenza

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

è una corrispondenza biunivoca e lineare.

Al pari della serie di Fourier, anche la trasformata di Fourier  $F(\omega)$  fornisce lo *spettro di frequenza* del segnale  $f(t)$ , che viene individuato dal suo modulo  $|F(\omega)|$  o *spettro di ampiezza* e dalla sua fase  $\angle F(\omega)$  o *spettro di fase*.

La rappresentazione per  $f(t)$  data nella (2.9) gioca per i segnali aperiodici un ruolo analogo alla rappresentazione data nella (2.4) per quelli periodici, poiché entrambe esprimono il segnale come combinazione lineare di esponenziali complessi. Per i segnali periodici, questi esponenziali complessi sono pesati con "ampiezza"  $c_n$  e sono definiti per valori discreti di frequenze  $n\omega_0$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Per segnali aperiodici, gli esponenziali complessi sono definiti su un continuo delle frequenze e sono pesati con "ampiezza" pari a  $F(\omega)d\omega/2\pi$ .

### Esempio 2.5.1.

Per apprezzare il significato fisico della coppia trasformata-antitrasformata di Fourier, riprendiamo l'esempio dell'impulso rettangolare di Figura 2.8. A questo riguardo si

consideri l'espansione in serie di Fourier dell'onda rettangolare periodica mostrata nell'Esempio 2.4.2.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2T_1}{T} \operatorname{sinc}(n\omega_0 T_1) e^{in\omega_0 t}$$

L'ampiezza di ogni armonica varia in relazione all'ampiezza della frequenza e l'insieme di valori è limitato da una funzione  $\operatorname{sinc}(\omega T_1)$ , come mostrato in Figura 2.9(a). L'effetto di aumentare il periodo (quadruplicandolo) è invece mostrato in 2.9(b), causando una maggiore concentrazione dello spettro di frequenza, ben visibile sull'asse delle frequenze, poiché  $\Delta\omega = \omega_0$  diminuisce. Per  $T \rightarrow \infty$  la separazione diviene infinitesimale e  $\Delta\omega$  diventa  $d\omega$ , trasformando la sommatoria in integrazione e lo spettro in un continuo rappresentato dalla curva continua in 2.9(c).

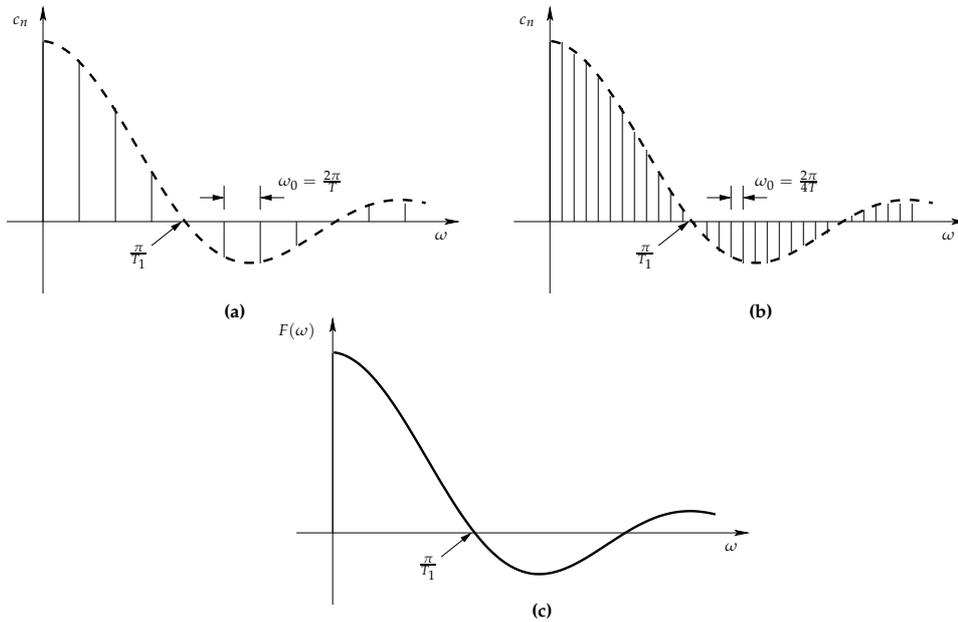


Figura 2.9 Spettro di frequenza per l'impulso rettangolare aperiodico.

### Esempio 2.5.2.

Si consideri il segnale

$$f(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0.$$

Dalla (2.9) si ha che la trasformata di Fourier di  $f(t)$  è

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega}, \quad a > 0.$$

Poiché questa trasformata è a valori complessi,  $F(\omega)$  può essere rappresentata mediante due grafici, rispettivamente del suo modulo e della sua fase, (Figura 2.10), in cui modulo e fase sono dati da:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle F(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a}.$$

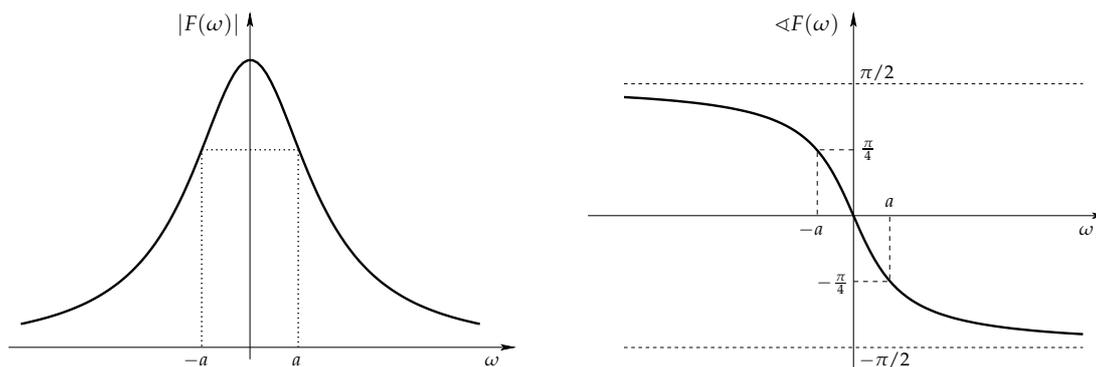


Figura 2.10 Modulo e fase della trasformata di Fourier di  $f(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ .

Lo spettro continuo di Figura 2.8 è la rappresentazione grafica della trasformata di Fourier di un singolo impulso rettangolare di durata  $T = 2T_1$  e ampiezza unitaria (nella trattazione precedente è stato considerato anche come segnale periodico di periodo infinito). La grande importanza che riveste questo tipo di segnale è legata all'uso che ne viene fatto nei sistemi di elaborazione digitali e nel mondo delle telecomunicazioni se si pensa che il digit "1" o l'impulso radar (per fare solo due esempi) vengono approssimati da un impulso rettangolare di durata finita e ampiezza fissata.

Matematicamente, se consideriamo il segnale impulso rettangolare di durata  $T$  e ampiezza  $V$ , e lo esprimiamo in termini di segnale rettangolare (definito nell'Esempio 1.2.1), cioè

$$f(t) = V \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} V, & \text{se } |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ricaviamo la sua trasformata come segue

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} V e^{-i\omega t} dt = \frac{TV}{\omega T/2} \left[ \frac{e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}}{2i} \right] = TV \operatorname{sinc}(\omega T/2),$$

che, ponendo  $V = 1$ , dà luogo alla nota coppia:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T \operatorname{sinc}(\omega T/2). \quad (2.10)$$

Si osservi che in questo caso la trasformata è una funzione reale, cosa non vera in generale visto che la trasformata di Fourier è una funzione a valori complessi. La Figura 2.11 riporta il grafico della coppia trasformata e antitrasformata dell'impulso rettangolare.

### 2.5.1 Esistenza della Trasformata di Fourier

Nella sezione precedente abbiamo ottenuto l'equazione generale della trasformata di Fourier e della sua inversa; qui ci proponiamo di discutere brevemente sotto quali condizioni tale trasformata esista.

In generale, perchè la trasformata di un dato segnale  $f(t)$  esista, deve esistere ed essere finito per ogni  $t$  il valore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

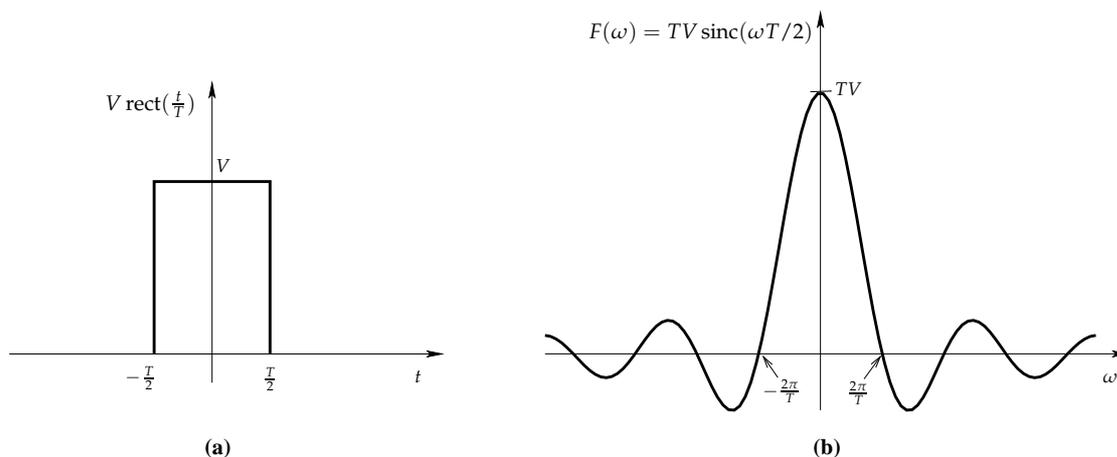


Figura 2.11 (a) Il segnale impulso rettangolare. (b) La sua trasformata di Fourier.

L'insieme di condizioni *sufficienti* per l'esistenza della trasformata di Fourier sono simili a quelle date per la serie di Fourier e note come le *condizioni di Dirichlet*, elencate di seguito:

1.  $f(t)$  deve essere limitato, cioè deve esistere una costante positiva  $M$  tale che:

$$|f(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{in particolare} \quad \sup_{\mathbb{R}} |f| \leq M;$$

2.  $f(t)$  deve avere un numero finito di minimi e di massimi;
3.  $f(t)$  deve avere un numero finito di discontinuità;
4.  $f(t)$  deve essere assolutamente integrabile, cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty.$$

In particolare, per quanto riguarda la terza condizione si deve aggiungere che nei punti di discontinuità in cui il limite destro ed il limite sinistro della  $f(t)$  sono diversi, la trasformata inversa converge al valore medio dei due limiti stessi.

Si noti che quelle di Dirichlet rappresentano condizioni sufficienti e non necessarie, altrimenti molti segnali importanti non ammetterebbero trasformata di Fourier. Infatti, tutte le funzioni di interesse pratico che considereremo di seguito soddisfano le condizioni 1, 2 e 3 sopra citate. Utilizzeremo invece spesso funzioni (o funzioni generalizzate) che non verificano l'ultima condizione, pur avendo trasformata di Fourier. Alcuni importanti esempi sono riportati di seguito.

### Esempio 2.5.3.

In questo esempio calcoliamo la trasformata di Fourier della delta di Dirac  $f(t) = \delta(t - t_0)$  (introdotta nella Sezione 1.2.1) e la trasformata di Fourier del segnale costante  $f(t) = 1$ . Si osservi che in quest'ultimo caso l'ultima condizione di Dirichlet non è verificata.

Ricordando che, se  $f(t)$  è una funzione continua in  $t_0$ , allora vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0),$$

possiamo concludere che:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega t}\Big|_{t=t_0} = e^{-i\omega t_0}$$

da cui si ricava la nota coppia di trasformate

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1. \quad (2.11)$$

Se d'altro lato si considera l'impulso nel dominio delle frequenze  $\delta(\omega - \omega_0)$ , antitrasformando si ricava

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{i\omega_0 t},$$

quindi

$$e^{i\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

e di conseguenza per  $\omega_0 = 0$

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega). \quad (2.12)$$

#### Esempio 2.5.4.

Un notevole esempio di segnale molto usato nei sistemi di comunicazione è il segnale *signum*, denotato da  $\text{sgn}$  e definita come segue:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{per } t > 0 \\ 0, & \text{per } t = 0 \\ -1, & \text{per } t < 0 \end{cases}. \quad (2.13)$$

Anche in questo caso la funzione non è assolutamente integrabile, quindi occorre trovare un diverso metodo di integrazione per calcolarne la trasformata. A tal riguardo si consideri la seguente uguaglianza di facile verifica:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \text{sgn}(t).$$

La sua trasformata di Fourier risulta pertanto essere:

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \text{sgn}(t)\right\} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}\left\{e^{-a|t|} \text{sgn}(t)\right\},$$

in cui l'operazione di limite e di integrazione sono stati scambiati senza dare una giustificazione matematica precisa. Poiché:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|} \text{sgn}(t)\right\} = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t}dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}dt = -\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega},$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} -\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2}{i\omega}. \quad (2.14)$$

**Esempio 2.5.5.**

Un'altro importante segnale, legato al segnale signum da una semplice trasformazione, è il gradino unitario  $u(t)$ , definita nell'Esempio 1.3.18. Infatti essa può essere scritta come:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t),$$

da cui otteniamo la sua trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{u(t)\} &= \frac{1}{2} \mathcal{F}\{1\} + \frac{1}{2} \mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} && \text{(per la linearità)} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}. \end{aligned}$$

**2.5.2 Potenza, Energia di un Segnale e Relazione di Parseval**

Dato un segnale  $f(t)$ , in generale complesso, si definisce *potenza istantanea* (in senso lato) la funzione

$$p(t) = f(t)\bar{f}(t) = |f(t)|^2$$

da cui deriva la definizione di *potenza media*

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (2.15)$$

ed *energia* del segnale

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.16)$$

Si osservi che un segnale che soddisfa la condizione  $E < +\infty$ , soddisfa anche la condizione di assoluta integrabilità (posta alla fine della sezione precedente per l'esistenza della trasformata di Fourier). Quindi se risulta  $0 < E < +\infty$ , allora il segnale viene detto ad *energia finita* (o anche *segnale di energia*). Esempi di segnali a energia finita sono i segnali non periodici di durata limitata, come l'impulso rettangolare, o segnali che tendono asintoticamente a zero<sup>1</sup> quando  $t$  tende a infinito, come il segnale  $f(t) = e^{-at}u(t)$ , per  $a > 0$ .

Un segnale si definisce a *potenza finita* (o anche *segnale di potenza*) nel caso in cui converga (ad un valore diverso da zero) l'integrale della (2.15) e quindi se  $0 < P < +\infty$ . Si noti che per un segnale a energia finita la potenza risulta nulla, pertanto detto segnale non può appartenere ad entrambe le categorie. Segnali quali il gradino unitario (1.1), la funzione signum (2.13) e le funzioni periodiche che rispettano le condizioni di Dirichlet, eccetto l'assoluta integrabilità, sono segnali a potenza finita benché l'energia sia infinita. Esistono inoltre segnali che non possiedono né energia né potenza finita, come il segnale  $f(t) = e^{-at}$ .

Una caratteristica spettrale che contraddistingue i segnali a potenza finita da quelli energia finita è che i primi hanno quasi sempre nel loro spettro la funzione impulsiva (delta di Dirac) mentre i secondi no (rivedere gli esempi 2.5.2, 2.5.3 e 2.5.5).

Un risultato che mette in relazione l'energia di un segnale e la sua trasformata di Fourier è data dal seguente:

<sup>1</sup>Solo nel caso di infinitesimi di ordine maggiore di 1.

**Fatto 2.1** (Teorema di Parseval). Se  $f(t)$  è un segnale di energia e  $F(\omega)$  la sua trasformata di Fourier, allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.17)$$

*Dimostrazione.* La relazione (2.17) segue dalla diretta applicazione della definizione di trasformata di Fourier. Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{f}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] dt.$$

Invertendo l'ordine di integrazione si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] d\omega.$$

Il termine tra parentesi quadre è la trasformata di Fourier di  $f(t)$ , quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

□

A causa della relazione di Parseval risulta dunque che l'energia del segnale  $f(t)$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Possiamo allora attribuire al quadrato del modulo della trasformata di Fourier il seguente significato:  $\frac{1}{2\pi} |F(\omega)|^2 d\omega$  è il contributo all'energia del segnale offerto dalle sue componenti con frequenza compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$ .

L'uguaglianza di Parseval consente di affermare che l'energia di un segnale può essere calcolata nel dominio del tempo a partire da  $|f(t)|^2$  oppure, equivalentemente, nel dominio della frequenza a partire da  $|F(\omega)|^2$ . In altri termini, l'energia del segnale si conserva passando dal dominio del tempo a quello della frequenza. Si nota inoltre che l'uguaglianza di Parseval afferma implicitamente che la trasformata di Fourier di un segnale di energia  $f(t)$  è ancora un segnale di energia  $F(\omega)$  nel dominio della frequenza.

La funzione della frequenza

$$S_f(\omega) = |F(\omega)|^2$$

prende il nome di *densità spettrale di energia* del segnale  $f(t)$  ed ha le seguenti proprietà: è una funzione non negativa per definizione, risulta essere una funzione pari della frequenza e il suo nome deriva dal fatto che, per l'uguaglianza di Parseval, l'energia del segnale  $f(t)$  si può ottenere integrando  $S_f(\omega)$  su tutto l'asse reale.

### 2.5.3 Banda e Ampiezza di Banda di un Segnale

Quasi tutti i segnali di interesse pratico possono essere rappresentati nel dominio delle frequenze mediante la trasformata di Fourier. Dall'equazione di sintesi si osserva che ogni segnale è dato dalla sovrapposizione di fasori ad ampiezza complessa  $F(\omega)$ , corrispondenti a una varietà continua di frequenze  $\omega$  su  $\mathbb{R}$ . Se si guarda allo spettro delle ampiezze  $|F(\omega)|$ , risulta evidente il peso che ciascun fasore ha nella sintesi del segnale  $f(t)$  o, alternativamente, su quale range di frequenze si concentra l'energia del segnale. In altre

parole, i fasori con ampiezza non nulla, o comunque significativa, compaiono nella sintesi, mentre quelli con ampiezza trascurabile o nulla del tutto, possono essere trascurati. Pertanto, è importante riconoscere l'intervallo di frequenze dove lo spettro delle ampiezze della trasformata risulta quantitativamente significativo (in cui si concentra) per diversi motivi: primo tra tutti la possibilità di restringere l'attenzione ad un intervallo ridotto nel caso l'estensione spettrale lo fosse, semplificando anche la natura matematica o pratica del calcolo integrale implicato dalla trasformazione; secondariamente, poiché i sistemi LTI operano una selezione in frequenza delle componenti spettrali del segnale d'ingresso, è opportuno sapere su quali componenti il sistema opera la selezione o qual'è il range di frequenza su cui produce effetti amplificativi o attenuativi.

Volendo eliminare ogni arbitrarietà che si introduce in questo genere di definizioni, diremo che l'intervallo di frequenze su cui lo spettro di ampiezza  $|F(\omega)|$  è non nulla viene chiamato *banda* ed è dato dall'insieme  $\mathcal{W}_F = \{\omega \in \mathbb{R} : |F(\omega)| \neq 0\}$ ; la sua misura  $B_F$  è detta invece *larghezza di banda* (dall'inglese *bandwidth*). Tuttavia per segnali reali, dato che lo spettro di ampiezza è una funzione pari (come vedremo più avanti in questa sezione), è sufficiente considerare solo le frequenze positive, dimezzando di fatto la banda cosiddetta *bilatera* e riferendoci alla banda *monolatera* in cui  $\omega \in [0, +\infty)$ . Risultano inoltre di particolare interesse segnali a banda limitata: un segnale  $f(t)$  con trasformata di Fourier  $F(\omega)$  è detto a *banda limitata* dalla frequenza  $B$  se  $\mathcal{W}_F = (-B, B)$  e quindi

$$|F(\omega)| = 0, \quad \forall \omega > B.$$

È immediato derivare che i segnali aventi spettri con bande disgiunte sono univocamente ricostruibili dalla loro somma, come mostrato chiaramente in Figura 2.12, in cui vengono evidenziate le bande monolateri  $\mathcal{W}_F$  e  $\mathcal{W}_G$  dei due spettri  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$ .

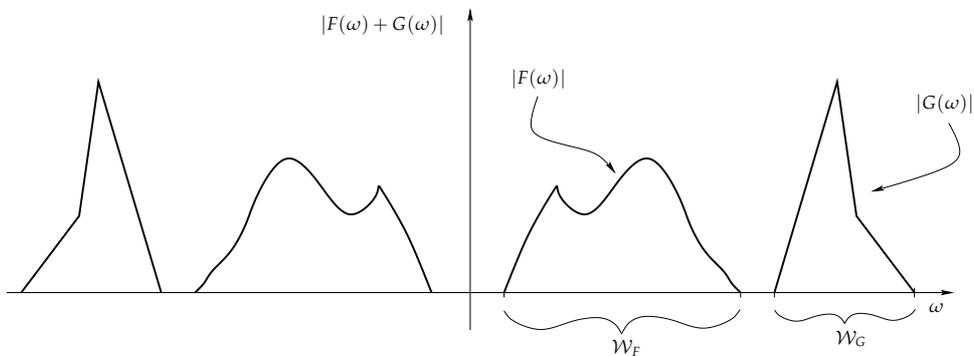


Figura 2.12 Segnali aventi spettri (e banda) disgiunti.

#### Esempio 2.5.6.

Segnali tipici a banda limitata sono quelli riportati in tabella 2.1.

### 2.5.4 Trasformata di Fourier di Funzioni Reali

La trasformata di Fourier  $F(\omega)$  di un segnale reale  $f(t)$  è in generale complessa. Come mostrato nell'esempio 2.5.2, per visualizzare graficamente  $F(\omega)$  è allora necessario consi-

**Tabella 2.1** Valori indicativi dei range di frequenze (banda) di alcuni segnali noti.

Tipo di segnale	Banda (Hz)
Elettrocardiogramma	0 – 100
Vocale (parlato)	100 – 4000 (4 kHz)
Musicale	0 – 20000 (20 kHz)
Video	0 – $5 \cdot 10^6$ (5 MHz)
Frequenze Radio AM	$3 \cdot 10^4$ – $3 \cdot 10^6$ (3 MHz)
Infrarosso	$3 \cdot 10^{11}$ – $3 \cdot 10^{14}$
Ultravioletto	$3 \cdot 10^{15}$ – $3 \cdot 10^{16}$

derare separatamente il modulo  $|F(\omega)|$  e la fase  $\angle F(\omega)$  della trasformata, le cui espressioni analitiche sono mostrate di seguito:

$$|F(\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{F(\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{F(\omega)\})^2},$$

$$\angle F(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{F(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{F(\omega)\}}\right).$$

Dato un segnale reale  $f(t)$  che ammette  $F(\omega)$  come trasformata, a causa dell'identità  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ , la parte reale  $\operatorname{Re}\{F(\omega)\}$  e la parte immaginaria  $\operatorname{Im}\{F(\omega)\}$  sono rispettivamente:

$$\operatorname{Re}\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad \operatorname{Im}\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt.$$

Poiché la funzione coseno è pari e la funzione seno è dispari, si ha che:

$$\operatorname{Re}\{F(\omega)\} = \operatorname{Re}\{F(-\omega)\}, \quad \operatorname{Im}\{F(\omega)\} = -\operatorname{Im}\{F(-\omega)\}.$$

Vale di conseguenza:

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|, \quad \angle F(\omega) = -\angle F(-\omega),$$

o equivalentemente:

$$\overline{F(\omega)} = F(-\omega).$$

Tale proprietà prende il nome di *simmetria hermitiana* e la dimostrazione precedente afferma che condizione necessaria e sufficiente perché sussista è che la funzione  $f(t)$  sia reale. Ne consegue che per funzioni reali il modulo della trasformata  $|F(\omega)|$  è una funzione pari e la fase  $\angle F(\omega)$  è una funzione dispari.

In Figura 2.13 è mostrato un tipico esempio del modulo e della fase della trasformata di una funzione reale (si veda anche l'Esempio 2.5.2).

### 2.5.5 Proprietà della Trasformata di Fourier

Nella Tabella 2.2 vengono riportate le principali proprietà delle trasformate di Fourier il cui contributo principale, oltre a favorire in molti casi la semplificazione dell'analisi di sistemi

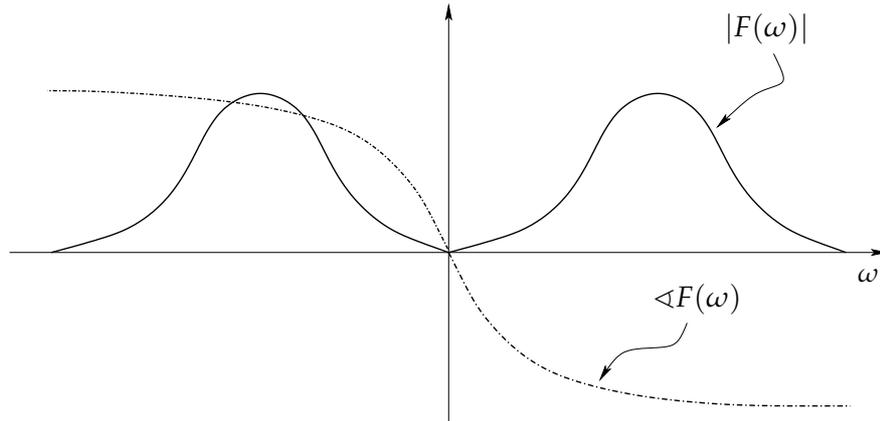


Figura 2.13 Modulo e fase della trasformata di Fourier di un segnale  $f(t)$  reale.

complessi, è quello di aiutare a comprendere meglio la relazione tra dominio del tempo e dominio delle frequenze dei segnali.

Di seguito viene proposta la giustificazione di alcune proprietà delle trasformate e ne viene mostrato l'impiego in alcuni esempi, rimandando a una letteratura più specializzata le dimostrazioni matematiche formali.

### Linearità

Poiché l'integrale è un'operatore lineare, allora la trasformata e antitrasformata di Fourier risultano possedere la stessa proprietà, essendo definite per mezzo di un integrale:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (af(t) + bg(t))e^{-i\omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\}\end{aligned}$$

### Esempio 2.5.7.

Le funzioni periodiche e reali trattate nella sezione precedente ammettono trasformata che può essere calcolata a partire dalla loro rappresentazione in serie di Fourier; infatti se  $f(t)$  è periodica di periodo  $T$ , allora

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Usando l'espansione in serie, la trasformata di Fourier di  $f(t)$  è

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \right) e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt.$$

Dalla 2.12 e per la linearità si ottiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0).$$

Tabella 2.2 Proprietà delle Trasformate di Fourier.

Proprietà	$f(t)$	$\leftrightarrow$	$F(\omega)$
Linearità	$af(t) + bg(t)$		$aF(\omega) + bG(\omega)$
Dualità (simmetria)	$F(t)$		$2\pi f(-\omega)$
Coniugazione	$\bar{f}(t)$		$\bar{F}(-\omega)$
Traslazione (tempo)	$f(t - t_0)$		$e^{-i\omega t_0} F(\omega)$
Traslazione (frequenza)	$e^{i\omega_0 t} f(t)$		$F(\omega - \omega_0)$
Convoluzione (tempo)	$f(t) * g(t)$		$F(\omega)G(\omega)$
Convoluzione (frequenza)	$f(t)g(t)$		$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$
Modulazione	$f(t) \cos \omega_0 t$		$\frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$
Scalatura	$f(at)$		$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Differenziazione (tempo)	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$		$(i\omega)^n F(\omega)$
Differenziazione (frequenza)	$(-it)^n f(t)$		$\frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
Integrazione (tempo)	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$		$\frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$

Il che mostra che lo spettro di frequenza di un segnale periodico altro non è che una sovrapposizione di funzioni impulsive nel dominio delle frequenze situate nei multipli interi (armoniche) della frequenza fondamentale della funzione  $f(t)$ . Il peso di ogni impulso è il coefficiente della serie armonica moltiplicato per  $2\pi$ .

Per esempio la funzione cosinusoidale

$$f(t) = A \cos \omega_0 t$$

grazie alla relazione di eulero e alla 2.12 ha trasformata:

$$\mathcal{F}\{A \cos \omega_0 t\} = \mathcal{F}\left\{\frac{A}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})\right\} = \frac{A}{2} \mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} + \frac{A}{2} \mathcal{F}\{e^{-i\omega_0 t}\}$$

da cui

$$A \cos \omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi A [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

**Dualità (simmetria)**

Rammentando le funzioni trasformata e l'antitrasformata

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.19)$$

ed osservando la simmetria esistente tra la (2.18) e la sua inversa (2.19) rispettivamente nella variabile  $t$  e nella variabile  $\omega$ , vale allora:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{F(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{i(-\omega)t} dt \right] \\ &= 2\pi f(-\omega). \end{aligned}$$

**Esempio 2.5.8.**

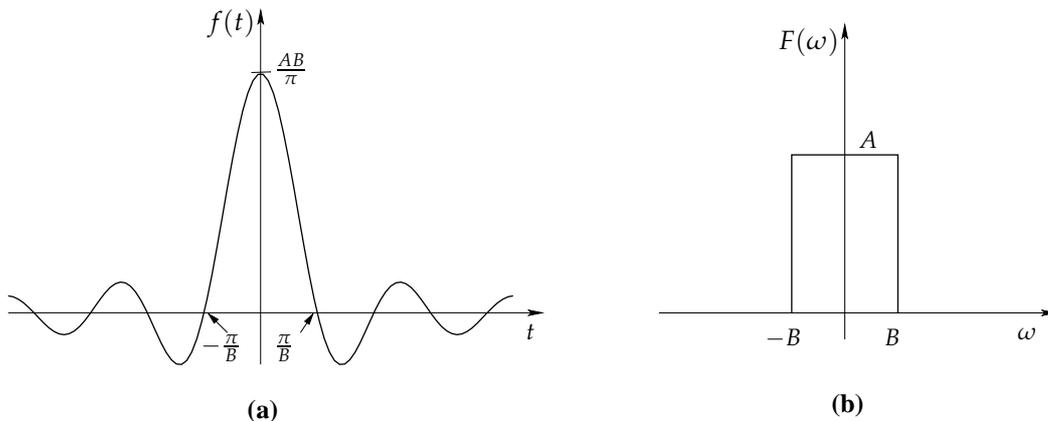
La trasformata inversa della funzione impulso rettangolare e definita nel dominio delle frequenze (Figura 2.14), può essere ottenuta applicando alla coppia di trasformate impulso-sinc (ricavata alla fine della Sezione 2.5) la proprietà di dualità:

$$f(t) = \frac{AB}{\pi} \operatorname{sinc} Bt \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) = \begin{cases} A & |\omega| < B \\ 0 & |\omega| > B \end{cases}. \quad (2.20)$$

Infatti se  $F(\omega) = A \operatorname{rect} \frac{\omega}{2B}$  è un rettangolo di base  $2B$  centrato nell'origine e altezza  $A$ , in accordo alla proprietà di dualità si ha:

$$\frac{A}{\pi t} \sin Bt \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi A \operatorname{rect} \left( -\frac{\omega}{2B} \right)$$

da cui per la simmetria del rettangolo (funzione reale pari) si deriva la (2.20).



**Figura 2.14** (a) Funzione sinc nel tempo. (b) Impulso rettangolare nel dominio della frequenza.

### Scalatura

Se  $a$  è un reale positivo si ha che:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{a}\tau} d\tau \quad (\text{con } \tau = at, \text{ da cui } dt = d\tau/a) \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right).\end{aligned}$$

Analogamente, se  $a$  è un reale negativo si ha che  $\mathcal{F}\{f(at)\} = -\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ .

### Traslazione nel tempo e in frequenza

Riguardo la traslazione nel tempo si ha che:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega(\tau+t_0)} d\tau \quad (\text{con } \tau = t-t_0, \text{ da cui } dt = d\tau) \\ &= e^{-i\omega t_0} F(\omega).\end{aligned}\tag{2.21}$$

Una conseguenza rilevante è che la trasformata del segnale traslato preserva il modulo ma introduce una traslazione lineare della fase pari a  $-t_0\omega$ . Infatti

$$e^{-i\omega t_0} F(\omega) = |F(\omega)|e^{i(\angle F(\omega) - \omega t_0)}.$$

La proprietà di traslazione in frequenza si verifica facilmente combinando la proprietà di dualità e quella di traslazione nel tempo.

#### Esempio 2.5.9.

Supponiamo di operare una scalatura e una traslazione temporale dell'impulso rettangolare  $f(t) = \text{rect}(t)$  (vedi Figura 2.15(a)) la cui trasformata, ricavata dalla (2.10), è:

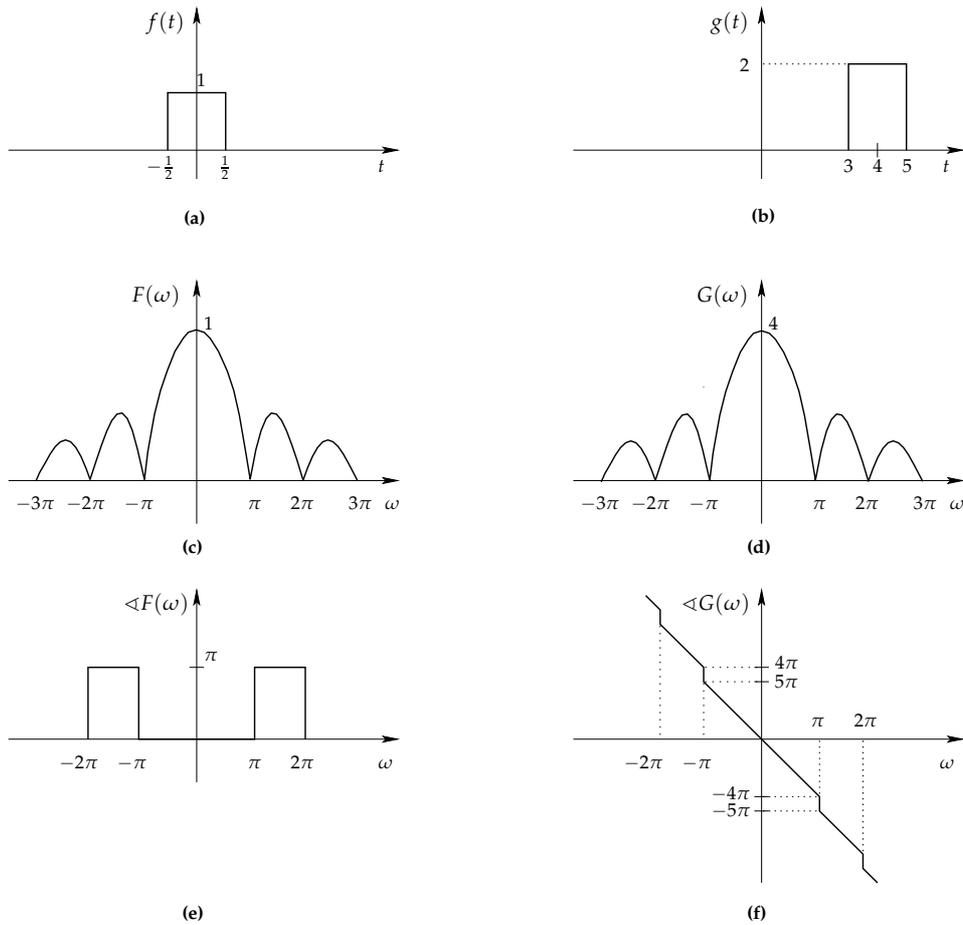
$$F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right).\tag{2.22}$$

Modulo e fase di  $F(\omega)$  sono mostrate rispettivamente nella Figura 2.15(c) e nella Figura 2.15(e).

Sia ora  $g(t) = 2f\left(\frac{t-4}{2}\right) = 2\text{rect}(0.5t-2)$ , il segnale illustrato in Figura 2.15(b). Usando la proprietà di traslazione temporale e di scalatura della trasformata, a partire dalla (2.22) si deriva facilmente:

$$G(\omega) = 4 \text{sinc}(\omega)e^{-i4\omega}.$$

L'ampiezza di  $G(\omega)$  è mostrata in Figura 2.15(d), mentre la fase, lineare a tratti e pari a  $-4\omega$  negli intervalli multipli pari di  $\pi$  e pari a  $-4\omega + \pi$  negli intervalli multipli dispari di  $\pi$ , è mostrata in Figura 2.15(f).



**Figura 2.15** (a) Segnale  $f(t) = \text{rect}(t)$ . (b) Segnale  $g(t) = 2f(\frac{t-4}{2})$ . (c-e) Modulo e fase della trasformata  $F(\omega)$  di  $f(t)$ . (d-f) Modulo e fase della trasformata  $G(\omega)$  di  $g(t)$ .

### Convoluzione nel tempo e in frequenza

Per la proprietà di convoluzione nel tempo si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) e^{-i\omega t} dt && \text{(per la (1.6))} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)e^{-i\omega t} dt \right) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}G(\omega)d\tau && \text{(per la traslaz. nel tempo (2.21))} \\
 &= G(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\
 &= G(\omega)F(\omega)
 \end{aligned}$$

La convoluzione in frequenza si giustifica applicando la proprietà di dualità a quella di convoluzione nel tempo.

**Esempio 2.5.10.**

La proprietà di convoluzione nel tempo risulta particolarmente utile quando le trasformate dei due segnali sono semplici, come nel caso della funzione  $\text{sinc}(x)$ .

**Modulazione**

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega_0 t e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(\omega+\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt \\ &= \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)].\end{aligned}$$

**Differenziazione**

Differenziando entrambi i membri della (2.19) si ha:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

da cui

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = i\omega F(\omega).$$

**Integrazione**

Si consideri la convoluzione di una generica funzione  $f(t)$  con la funzione gradino unitario (definita nell'Esempio 1.3.18):

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau. \quad (2.23)$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} &= \mathcal{F}\{f(t) * u(t)\} && \text{(per la (2.23))} \\ &= F(\omega) \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}\right) && \text{(per la prop. di convoluzione)} \\ &= \frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega).\end{aligned}$$

Il fattore  $F(0)$  nella precedente espressione deriva dal fatto che, se  $F(\omega)$  è una funzione continua in 0, allora  $F(\omega)\delta(\omega) = F(0)\delta(\omega)$ .

**Esempio 2.5.11.**

La proprietà di linearità è in molti casi utile per trovare la trasformata di Fourier di alcuni tipi di forme d'onda. Si consideri ad esempio

$$f(t) = B \cos \omega_0 t.$$

Usando la relazione di Eulero,

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

possiamo riscrivere l'espressione per  $f(t)$  come

$$f(t) = \frac{B}{2} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] = \frac{B}{2} e^{i\omega_0 t} + \frac{B}{2} e^{-i\omega_0 t}.$$

Sapendo che la trasformata dell'esponenziale complesso  $e^{i\omega_0 t}$  è un impulso traslato in  $\omega_0$ , per la linearità abbiamo che

$$\mathcal{F}\{B \cos \omega_0 t\} = \frac{B}{2} \mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} + \frac{B}{2} \mathcal{F}\{e^{-i\omega_0 t}\} = \pi B \delta(\omega - \omega_0) + \pi B \delta(\omega + \omega_0),$$

od anche

$$\cos \omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi B [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

## 2.5.6 Coppie Base di Trasformate

Nella Tabella 2.3 vengono riportate alcune coppie base trasformata-antitrasformata di Fourier che spesso si incontrano nella pratica. Queste coppie sono particolarmente utili per il fatto che in molti casi i sistemi complessi possono essere descritti come combinazioni di sistemi più semplici dei quali sono note le coppie di trasformate.

## 2.6 Risposta in Frequenza dei Sistemi Lineari Tempo-Invarianti

Nel capitolo precedente abbiamo definito la classe dei sistemi lineari e tempo-invarianti (LTI), mostrando che il loro comportamento è completamente individuato dalla risposta del sistema alla funzione impulsiva  $\delta(t)$ .

Infatti, se  $S$  è un sistema lineare tempo-invariante,  $h(t)$  è la risposta  $S(\delta(t))$  del sistema all'impulso  $\delta(t)$  e  $g(t)$  è la risposta  $S(f(t))$  del sistema all'ingresso  $f(t)$ , allora

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(t-x)dx,$$

come dimostrato in Fatto 1.5. In altri termini, l'uscita  $g(t)$  del sistema  $S$  è la convoluzione dell'ingresso  $f(t)$  con la risposta all'impulso  $h(t)$ . A causa della proprietà di convoluzione riportata in Tabella 2.2, denotando con  $F(\omega)$ ,  $H(\omega)$  e  $G(\omega)$  rispettivamente le trasformate di Fourier di  $f(t)$ ,  $h(t)$  e  $g(t)$ , si ottiene:

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega).$$

La trasformata di Fourier  $H(\omega)$  della risposta  $h(t)$  all'impulso è spesso chiamata *funzione di trasferimento* del sistema. Analizzando il comportamento del sistema nel dominio delle frequenze anziché nel dominio dei tempi, possiamo concludere:

**Tabella 2.3** Alcune coppie base di trasformata-antitrasformata ( $a$ , dove compare, è un numero reale positivo).

$\mathbf{f}(t)$	$\mathbf{F}(\omega)$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + i\omega}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + i\omega)^2}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-at^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{\pm i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2i}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a + i\omega}{(a + i\omega)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + i\omega)^2 + \omega_0^2}$
$f_T(t) = \begin{cases} 1 &  t  < T/2 \\ 0 &  t  > T/2 \end{cases}$	$T \text{sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right)$
$\text{sinc}\left(\frac{Tt}{2}\right)$	$\frac{2\pi}{T} f_T(\omega)$

**Fatto 2.2.** La risposta nel dominio delle frequenze  $G(\omega)$  di un sistema LTI con funzione di trasferimento  $H(\omega)$  è il prodotto della trasformata di Fourier  $F(\omega)$  dell'ingresso per la funzione di trasferimento  $H(\omega)$ .

Per quanto riguarda il modulo delle trasformate in gioco, vale che

$$|G(\omega)| = |H(\omega)||F(\omega)|.$$

Pertanto i sistemi LTI sono in grado di operare una certa selezione sulle frequenze, ampliando o attenuando in uscita le componenti armoniche dell'ingresso. Per questa attitudine a "filtrare" componenti in frequenza, i sistemi LTI sono anche detti *filtri lineari*.

### 2.6.1 Filtri Ideali

Un sistema senza distorsione è un sistema che riproduce in uscita la stessa forma del segnale d'ingresso, a meno di un eventuale fattore amplificativo e di un eventuale ritardo temporale. Un tale sistema può essere quindi descritto dalla trasformazione:

$$g(t) = Af(t - t_0).$$

Passando alle trasformate di Fourier e applicando la proprietà di traslazione temporale, si ha:

$$G(\omega) = Ae^{-i\omega t_0}F(\omega).$$

La funzione di trasferimento  $H(\omega)$  del sistema è quindi data da:

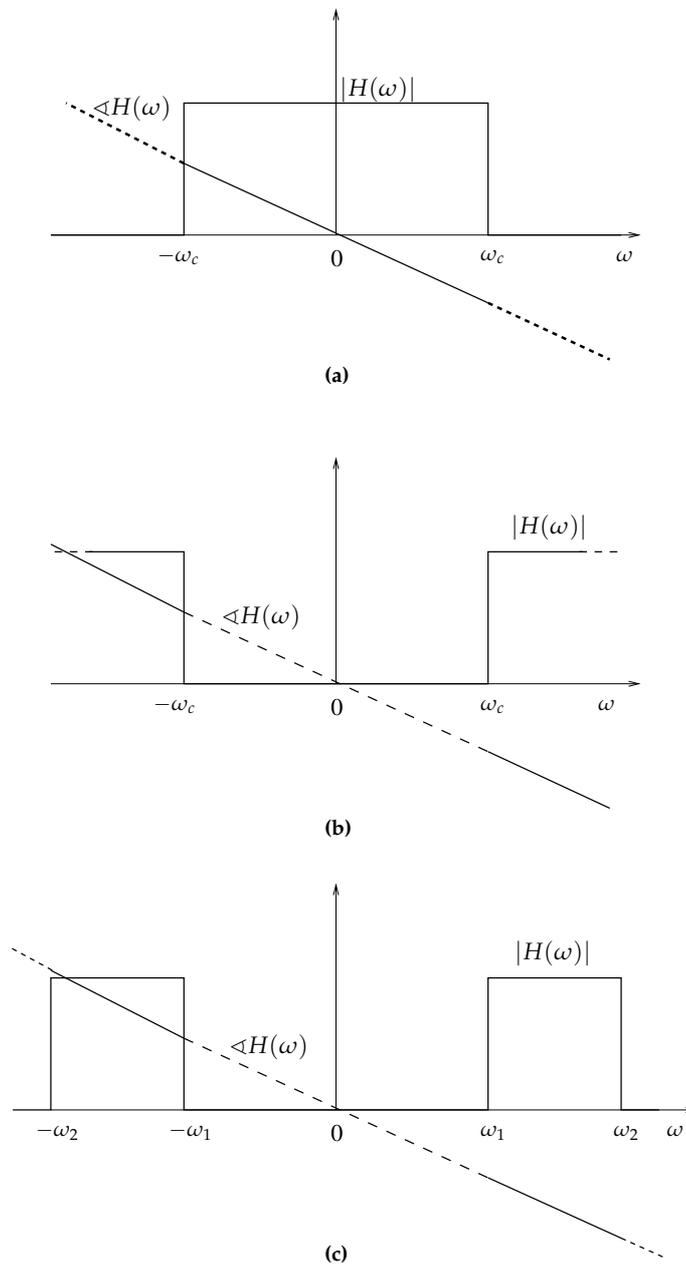
$$H(\omega) = Ae^{-i\omega t_0}.$$

Si noti che il modulo della funzione di trasferimento è costante ( $|H(\omega)| = A$ ) mentre la fase è lineare ( $\angle H(\omega) = -t_0\omega$ ).

Un sistema che annulla le componenti armoniche in determinati intervalli di frequenza e che si comporta come un sistema senza distorsione sulle frequenze rimanenti è detto *filtro ideale*. Un esempio di filtro ideale è il filtro *passabasso*, che "passa" (riproduce in uscita con guadagno costante e fase lineare) le componenti con frequenza non superiore a una certa *frequenza di taglio*  $\omega_c$ , ed elimina quelle con frequenza superiore a questa soglia. Tale filtro ha quindi la seguente funzione di trasferimento:

$$H(\omega) = \begin{cases} Ae^{-i\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Un filtro *passaalto*, viceversa, elimina le componenti in frequenza basse e passa quelle alte (superiori a  $\omega_c$ ); il filtro *passabanda* infine, passa una *banda* o *intervallo* di componenti in frequenza ( $\omega_a < \omega < \omega_b$ ) ed elimina quelle inferiori o superiori ad essa. Le bande evidenziate in questi esempi sono quindi due: la banda che interessa preservare effettivamente (*banda passante*) e la banda nella quale si richiede l'eliminazione (*banda proibita*). Modulo e fase dei filtri ideali sono mostrati in Figura 2.16.



**Figura 2.16** (a). Risposta in frequenza di un filtro passabasso ideale. (b). Risposta in frequenza di un filtro passaalto ideale. (c). Risposta in frequenza di un filtro passabanda ideale.

**Esempio 2.6.1.**

Ricostruzione di due segnali a partire dalla loro somma.

Fissati due segnali  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , si vuole ricostruire  $f_1(t)$  o  $f_2(t)$  conoscendo la loro somma  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ . Questo non è in generale possibile, poiché la conoscenza della somma non permette di individuare univocamente gli addendi. La ricostruzione è tuttavia possibile in certi casi particolari.

Supponiamo qui che i supporti delle trasformate  $F_1(\omega)$  e  $F_2(\omega)$  dei segnali  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  siano disgiunti. Per esempio, consideriamo il caso in cui  $F_1(\omega) = 0$  per  $\omega > W_1$  e  $F_2(\omega) = 0$  per  $\omega < W_2$ , con  $W_1 < W_2$  (considerando solo valori non negativi delle frequenze). Applicando al segnale somma  $f(t)$  un filtro ideale passabasso con frequenza di taglio  $W_1$ , si ottiene in uscita il segnale  $f_1(t)$ . Infatti, se la funzione di trasferimento del filtro è

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W_1 \\ 0, & |\omega| > W_1 \end{cases}$$

la trasformata di Fourier  $G(\omega)$  dell'uscita è tale che:

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega).$$

Ricordando che per  $\omega \leq W_1$  risulta  $F(\omega) = F_1(\omega)$  e  $H(\omega) = 1$ , mentre per  $\omega > W_1$  risulta  $H(\omega) = 0$  si ottiene:

$$G(\omega) = F_1(\omega).$$

Antitrasformando, concludiamo che il filtro produce il segnale  $f_1(t)$ .

Per studiare il comportamento di un filtro ideale nel dominio del tempo, basta osservare che la risposta  $h(t)$  del filtro all'impulso  $\delta(t)$  è l'antitrasformata di Fourier della sua funzione di trasferimento. Per fissare le idee, consideriamo qui un filtro passabasso con funzione di trasferimento  $H(\omega)$  dove:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}.$$

Come ricavato nell'esempio 2.5.8, l'antitrasformata di Fourier di  $H(\omega)$ , e quindi la risposta all'impulso di tale sistema, è la funzione

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t},$$

il cui grafico è dato in Figura 2.17.

Si osserva che  $h(t)$  è in generale diversa da zero per  $t < 0$  e quindi il filtro ideale è un sistema lineare tempo-invariante ma non causale. Questo significa che un filtro ideale non può essere realizzato in pratica se si intende mantenere un qualche principio di causalità; l'approssimazione di filtri ideali con filtri fisicamente realizzabili sarà studiata in seguito.

## 2.6.2 Sistemi Caratterizzati da Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Costanti

Un'importante classe di sistemi LTI è quella in cui l'ingresso  $f(t)$  e l'uscita  $g(t)$  soddisfano un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti della forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k g(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k}. \quad (2.24)$$

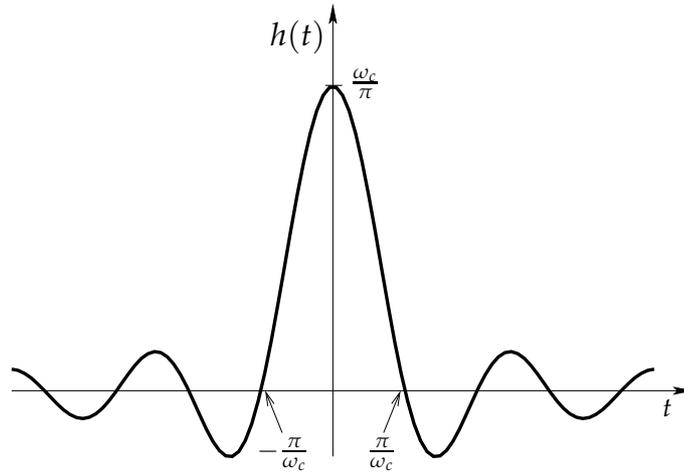


Figura 2.17 Risposta all'impulso di un filtro passabasso ideale.

Si osservi che il sistema presentato nell'Esempio 1.3.1 corrisponde al caso particolare in cui  $N = 1$  e  $M = 0$ ; come vedremo in seguito, circuiti ottenuti con resistenze, induttanze e condensatori realizzano sistemi i cui comportamenti sono descritti dall'equazione differenziale (2.24).

Poiché in generale un'equazione differenziale ammette infinite soluzioni, occorre dare delle condizioni ausiliarie per determinare completamente la relazione ingresso-uscita del sistema. In particolare, è qui sufficiente assumere che il sistema sia causale, cioè  $g(t) = 0$  per  $t < t_0$  se  $f(t) = 0$  quando  $t < t_0$ .

Vogliamo ora determinare la funzione di trasferimento del sistema descritto dall'equazione (2.24).

Se si applica la trasformata di Fourier ad entrambi i membri della (2.24) si ottiene

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k g(t)}{dt^k} \right\} = \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right\}.$$

Dalla proprietà di linearità:

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F} \left\{ \frac{d^k g(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F} \left\{ \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right\}$$

e dalla proprietà di differenziabilità (Tabella (2.2)), denotando con  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$  rispettivamente la trasformata di Fourier di  $f(t)$  e  $g(t)$ , si ha che:

$$\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k G(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k F(\omega),$$

o equivalentemente

$$G(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k} F(\omega).$$

Concludiamo che la funzione di trasferimento  $H(\omega)$  di questo sistema è della forma:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k}.$$

Si osservi che la funzione  $H(\omega)$  è una funzione razionale, cioè un rapporto di polinomi nella variabile  $i\omega$ . I coefficienti del numeratore sono esattamente i coefficienti del membro sinistro della (2.24), mentre i coefficienti del denominatore sono esattamente i coefficienti del membro della (2.24). In questo modo  $H(\omega)$  può essere facilmente dedotta dall'equazione differenziale stessa e antitrasformata applicando il metodo delle frazioni parziali come mostrato nel seguente esempio.

### Esempio 2.6.2.

Si consideri un sistema LTI caratterizzato dalla seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t).$$

Per quanto visto in precedenza la risposta in frequenza del sistema è:

$$H(\omega) = \frac{i\omega + 2}{(i\omega)^2 + 4(i\omega) + 3}.$$

Per determinare la corrispondente risposta all'impulso è richiesta la trasformata inversa di  $H(\omega)$ . Questo può essere fatto mediante l'impiego della tecnica di *espansione in frazioni parziali*. Come primo passo fattorizziamo il denominatore scrivendolo nella forma:

$$H(\omega) = \frac{i\omega + 2}{(i\omega + 1)(i\omega + 3)}. \quad (2.25)$$

Poichè le due radici sono distinte e di molteplicità uno<sup>2</sup>, espandiamo  $H(\omega)$  nella somma di funzioni razionali più semplici (frazioni parziali):

$$H(\omega) = \frac{A_1}{(i\omega + 1)} + \frac{A_2}{(i\omega + 3)}. \quad (2.26)$$

Il problema ora è quello di determinare le costanti  $A_1$  e  $A_2$ . Un semplice metodo è offerto dalla seguente procedura: supponiamo di voler calcolare la costante  $A_1$ , allora moltiplicando entrambi i membri della (2.26) per  $(i\omega + 1)$  otteniamo

$$(i\omega + 1)H(\omega) = A_1 + \frac{A_2(i\omega + 1)}{i\omega + 3}.$$

Valutando l'equazione precedente in  $i\omega = -1$  si ha che

$$A_1 = (i\omega + 1)H(\omega)|_{i\omega=-1}$$

da cui, sostituendo  $H(\omega)$  con la (2.25), si ricava che

$$A_1 = \left. \frac{i\omega + 2}{i\omega + 3} \right|_{i\omega=-1} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente si trova che  $A_2 = \frac{1}{2}$ , da cui

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{i\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{i\omega + 3}. \quad (2.27)$$

Dall'Esempio 2.5.2 sappiamo riconoscere la trasformata inversa di ciascuno dei due termini della (2.27), ottenendo il seguente risultato:

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t).$$

<sup>2</sup>Qualora una radice, che chiamiamo  $q$ , sia di molteplicità  $s > 1$ , verrà espansa come la somma di  $s$  funzioni razionali nel seguente modo:  $\frac{A_{11}}{(i\omega+q)} + \frac{A_{12}}{(i\omega+q)^2} + \dots + \frac{A_{1s}}{(i\omega+q)^s}$ .

Il rapporto ingresso-uscita del sistema causale descritto dall'equazione differenziale qui considerata risulta quindi:

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{2}e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-3\tau} \right) f(t - \tau) d\tau.$$

## 2.7 Modulazione nei Sistemi di Comunicazione

L'operazione di modulazione consiste nel rilanciare la banda base di un segnale su una opportuna banda (alte frequenze) che renda possibile, nonché efficiente, la trasmissione dello stesso su canali presenti nei sistemi di comunicazione reali, preservando quanto più possibile l'informazione codificata.

Questa necessità è dovuta a tre ragioni principali.

1. La lunghezza d'onda è inversamente proporzionale alla frequenza. In una trasmissione con onde elettromagnetiche, che si muovono alla velocità della luce, la ricezione efficiente viene effettuata attraverso antenne la cui dimensione è almeno  $\lambda/10$  metri, dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda del segnale ricevuto. È singolare verificare che segnali che si muovono alla velocità della luce ( $c = 3 \times 10^8$  m/s), con frequenza  $f_c = 5$  kHz, richiedono antenne di dimensioni pari a un decimo di

$$\lambda = \frac{c}{f_c} = \frac{3 \times 10^8 \text{ [m/s]}}{5 \times 10^3 \text{ [1/s]}} = 60 \text{ km,}$$

che si traduce in una specifica di almeno 6 km di lunghezza per l'antenna in ricezione! Misure che risulterebbero quanto meno poco pratiche. È quindi evidente che occorre aumentare la frequenza del segnale trasmesso per diminuire la dimensione degli apparati riceventi.

2. Interferenza e rumore nella trasmissione. La presenza di più trasmettitori sulla stessa banda di frequenza creerebbe problemi di sovrapposizione. Per esempio, i segnali del parlato variano su un range di frequenze da 0 a 4000 Hz, la musica da 0 a 20 kHz, i segnali video originali da 0 a 5 MHz; se segnali dello stesso tipo fossero trasmessi contemporaneamente sulla stessa frequenza, in ricezione si avrebbero pesanti interferenze. Non solo: ai segnali trasmessi si andrebbero ad aggiungere i numerosi disturbi o rumori presenti nelle basse frequenze (luce elettrica, motori elettrici), da qui l'importanza di trasmettere su alte frequenze.
3. La complessità dei sistemi di trasmissione (trasmittenti, riceventi e trasduttori) viene semplificata in presenza di segnali modulati.

### Esempio 2.7.1.

In tabella 2.1 sono riportate le bande di frequenza dello spettro radio (segnali elettromagnetici) e i loro principali impieghi.

Tabella 2.4 Bande di frequenza e principali impieghi dello spettro radio.

Nome della banda	Range di frequenze (Hz)	Principali impieghi
ELF (Extremely low frequency)	3 – 30 Hz	comunicazioni sottomarine
SLF (Super low frequency)	30 – 300 Hz	comunicazioni sottomarine
ULF (Ultra low frequency)	300 – 3000 Hz	comunicazioni sottomarine
VLF (Very low frequency)	3 – 30 kHz	comunicazioni marine
LF (Low frequency)	30 – 300 kHz	radio AM
MF (Medium frequency)	300 – 3000 kHz	radio AM
HF (High frequency)	3 – 30 MHz	radioamatori (onde corte)
VHF (Very high frequency)	30 – 300 MHz	radio FM, TV
UHF (Ultra high frequency)	300 – 3000 MHz	ponti radio, TV, cellulare, WLAN
SHF (Super high frequency)	3 – 30 GHz	radar, satelliti, WLAN
EHF (Extremely high frequency)	30 – 300 GHz	sistemi wireless fissi, satelliti

### 2.7.1 Modulazione e Demodulazione in Ampiezza (AM)

Un modo per rilanciare il segnale  $f(t)$  su diverse bande di frequenza è quello di moltiplicare il segnale per una sinusoidale di opportuna frequenza  $\omega_0$ :

$$g(t) = A f(t) \cos \omega_0 t.$$

Il segnale sinusoidale è detto *portante (carrier)*, il segnale  $f(t)$  *modulante* e il segnale  $g(t)$  *segnale modulato*. Il sistema così realizzato è un sistema lineare ma non tempo-invariante, detto *modulazione di ampiezza (AM)*.

Ricordando che  $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$ , passando al dominio delle frequenze (vedi proprietà di modulazione in paragrafo 2.5.5) si ha:

$$G(\omega) = \frac{A}{2} (F(\omega + \omega_0) + (F(\omega - \omega_0))).$$

Poiché  $f(t)$  è un segnale reale, sappiamo che  $|F(\omega)|$  è una funzione pari; supponiamo inoltre che  $F(\omega)$  sia a banda limitata, cioè che  $F(\omega)$  sia nulla per  $|\omega| \geq W$  come mostrato nel grafico di Figura 2.18. Il segnale ha componenti non nulle per frequenze  $-W \leq \omega \leq W$ . Se  $\omega_0 \gg W$ , il segnale modulato  $g(t)$  ha, per frequenze positive, componenti non nulle per  $\omega_0 - W \leq \omega \leq \omega_0 + W$ , come mostra il grafico di Figura 2.19.

Possiamo allora concludere:

**Fatto 2.3.** *Un segnale  $f(t)$  a banda limitata da  $W$  può essere completamente ricostruito dal segnale modulato  $g(t) = A f(t) \cos \omega_0 t$ , se  $\omega_0 > W$ .*

Osserviamo che, per segnali a banda limitata da  $W$  e con  $\omega_0 > W$ , il segnale modulato  $g(t)$  è ridondante ai fini della ricostruzione di  $f(t)$ . Infatti, poiché  $G(\omega_0 - \omega) = G(\omega_0 + \omega)$  per  $0 \leq \omega \leq W$ , il segnale  $g(t)$ , e quindi  $f(t)$ , può essere ricostruito sulla base della conoscenza di  $G(\omega)$  nell'intervallo (side)  $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0 + W$  anziché sull'intero intervallo (double-side)  $\omega_0 - W \leq \omega \leq \omega_0 + W$ .

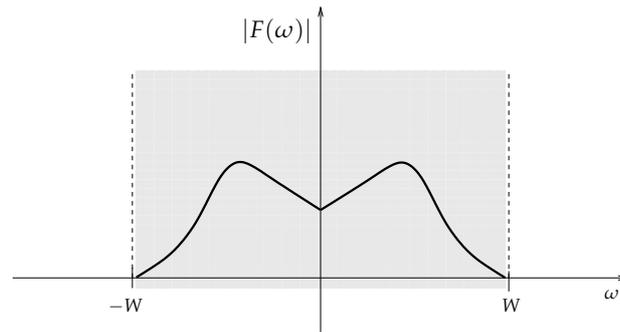


Figura 2.18 Modulo della trasformata di un segnale reale  $f(t)$  a banda limitata da  $W$ .

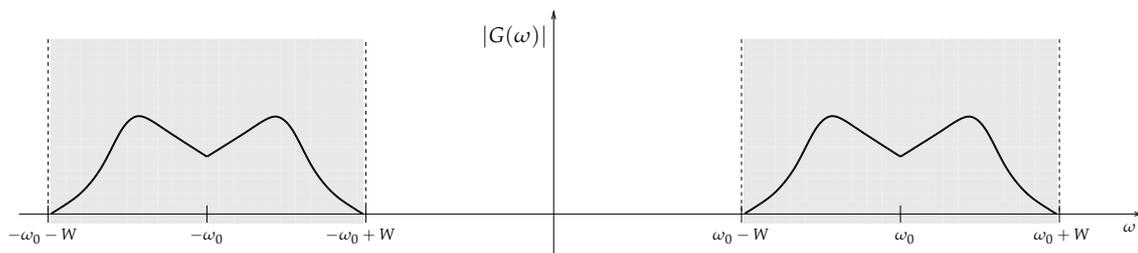


Figura 2.19 Modulo della trasformata del segnale modulato  $g(t) = A f(t) \cos \omega_0 t$ .

Per questo motivo la modulazione di ampiezza prima introdotta è chiamata DSB/SC-AM (*Double-Sideband Suppressed Carrier Amplitude Modulation*); essa comporta una richiesta di banda per la trasmissione di dimensione almeno  $2W$ , e un certo sforzo è stato dedicato a perfezionare l'operazione di modulazione per poter risparmiare banda (riducendola del 50%) per la trasmissione. Uno dei metodi adottati consiste nell'applicare un filtro passabanda per eliminare le frequenze indesiderate.

### Demodulazione

Abbiamo visto che, in linea di principio, il segnale  $f(t)$  può essere ricostruito sulla base del segnale modulato  $g(t)$ . Descriviamo ora brevemente un sistema di demodulazione, in grado di realizzare effettivamente la ricostruzione. Per prima cosa si applica al segnale  $g(t) = A \cos \omega_0 t f(t)$  una nuova modulazione ottenendo il segnale

$$z(t) = g(t) \cos \omega_0 t = A f(t) \cos^2 \omega_0 t.$$

Ricordando la formula di bisezione del coseno  $\cos^2 \omega_0 t = (1 + \cos 2\omega_0 t)/2$ , si ottiene:

$$z(t) = \frac{A}{2} [f(t) + f(t) \cos 2\omega_0 t].$$

Applicando le trasformate di Fourier, l'espressione precedente diventa:

$$Z(\omega) = \frac{A}{2} F(\omega) + \frac{A}{4} [F(\omega + 2\omega_0) + F(\omega - 2\omega_0)].$$

Se  $f(t)$  è a banda limitata da  $W$  e se  $\omega_0 > 2W$ , applicando a  $z(t)$  un filtro passabasso con frequenza di taglio  $W$  si ottiene il segnale  $\frac{A}{2} f(t)$ . Il sistema complessivo di modulazione, trasmissione e demodulazione è rappresentato nella Figura 2.20.

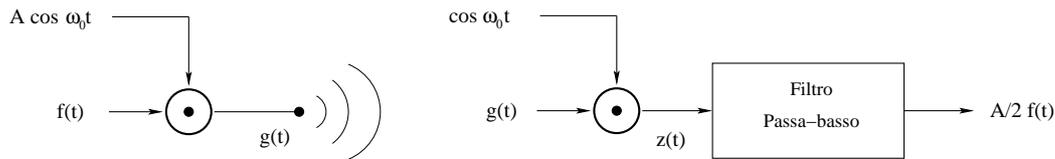


Figura 2.20 Modulazione AM, trasmissione e demodulazione AM.

Un'ulteriore applicazione della modulazione AM è la possibilità di trasmettere simultaneamente più segnali (a banda limitata da  $W$ ) sullo stesso canale. Supponiamo di voler trasmettere due segnali  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  a banda limitata da  $W$ . Possiamo procedere come segue:

1. si modulano  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  con due diverse frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_2$  ottenendo  $g_1(t) = Af_1(t) \cos \omega_1 t$  e  $g_2(t) = Af_2(t) \cos \omega_2 t$ ;
2. si sommano i due segnali  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  trasmettendo il segnale  $g(t)$  risultante;
3. se  $\omega_1, \omega_2 > W$  e  $|\omega_1 - \omega_2| > 2W$ , è facile osservare che i supporti di  $G_1(\omega)$  e  $G_2(\omega)$  risultano disgiunti, e quindi dal segnale  $g(t)$  è possibile ricostruire i segnali  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  con l'applicazione degli opportuni demodulatori.

Un esempio di sistema che trasmette simultaneamente 2 segnali modulati sullo stesso canale è mostrato in Figura 2.21.

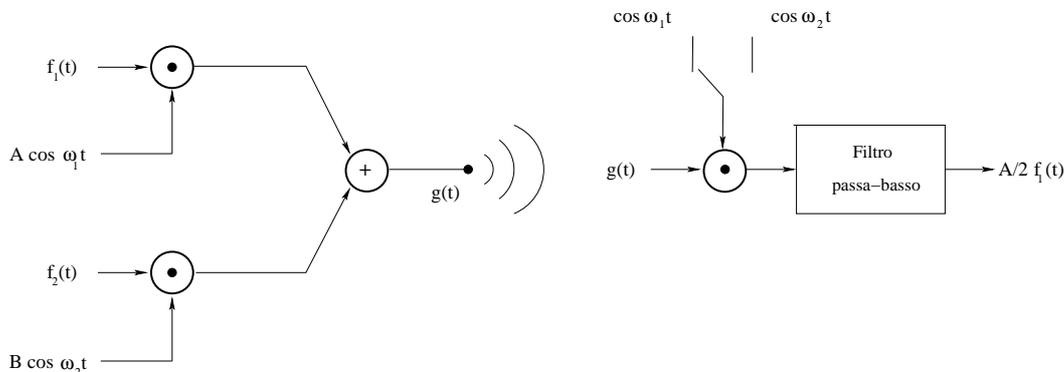


Figura 2.21 Trasmissione simultanea di 2 segnali modulati (AM) e ricezione.

Il metodo precedente può essere facilmente esteso alla trasmissione sullo stesso canale di  $N$  segnali a banda limitata da  $W$ : in questo caso la larghezza della banda utilizzata dovrà essere almeno  $2NW$ .

### Esempio 2.7.2.

Le stazioni per trasmissioni radio commerciali in AM utilizzano una modulazione leggermente diversa da quella qui trattata, detta AMSB-TC o AM convenzionale:

$$g(t) = A(1 + af(t)) \cos \omega_0 t.$$

Nella formula precedente  $f(t)$  è un segnale normalizzato, in modo che  $|f(t)| \leq 1$ , ed il parametro  $a$  è un numero reale compreso tra 0 ed 1, detto indice di modulazione. Mentre  $f(t)$  può assumere anche valori negativi, il termine  $1 + af(t)$  risulta sempre positivo: il segnale  $g(t)$  può quindi essere demodolato con un semplice rivelatore di inviluppo, ottenendo in uscita il segnale  $A(1 + af(t))$  che, a meno di una traslazione e di un fattore di scala, coincide con  $f(t)$ .

Il rivelatore di inviluppo è basato sul fatto che, per funzioni  $s(t)$  a valori positivi, l'inviluppo di  $s(t) \cos \omega_0 t$  coincide proprio con  $s(t)$ , come si rileva in Figura 2.22.

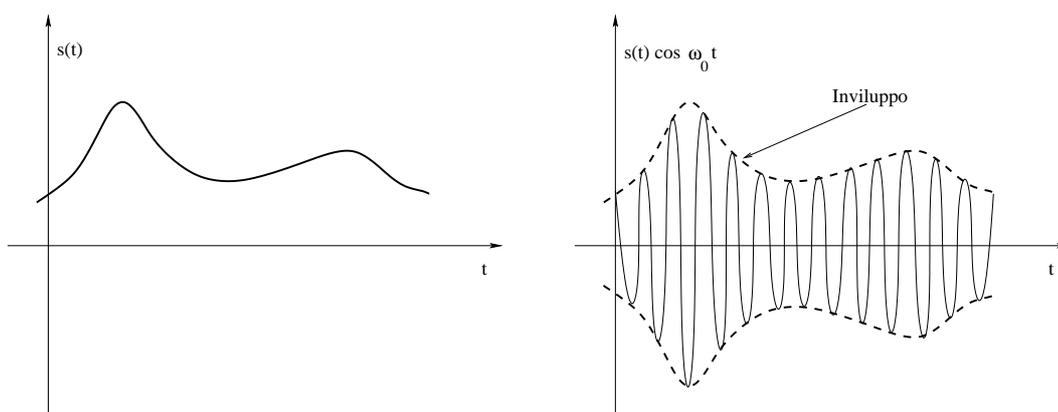


Figura 2.22 Inviluppo del segnale  $s(t) \cos \omega_0 t$ , con  $s(t) \geq 0$ .

La modulazione AM convenzionale presenta allora una maggior complessità nel sistema che effettua la modulazione, semplificando tuttavia il ricevitore, come si addice alle trasmissioni "broadcast". Un semplice rivelatore di inviluppo è dato dal circuito mostrato in Figura 2.23.

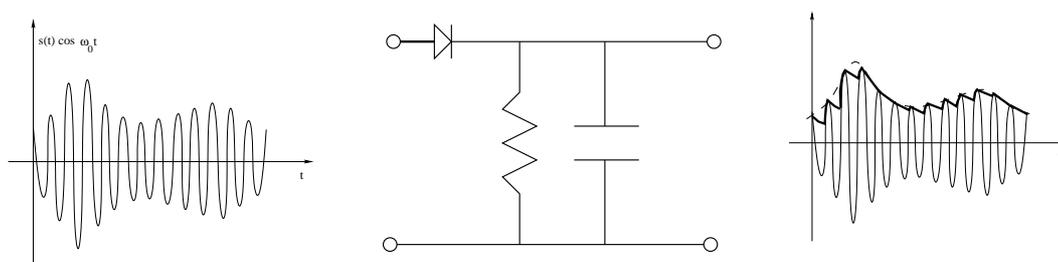


Figura 2.23 Rivelatore di inviluppo.

Esso è composto da un diodo che, avendo in ingresso il segnale  $m(t)$ , dà in uscita il segnale  $m(t)u(m(t))$ , eliminando quindi le componenti negative del segnale, e da un circuito RC che elimina le componenti in alta frequenza.

La banda disponibile per trasmissioni in AM varia da 535 a 1605 kHz; tale banda viene divisa in identici blocchi di 10 kHz e ad ogni stazione viene assegnato un blocco: la stazione può allora trasmettere senza interferire messaggi con limite di banda di 5 kHz.

## 2.8 Modulazione e Demodulazione in Frequenza (FM)

In questo paragrafo discutiamo un'altra importante tecnica di modulazione analogica: la modulazione in frequenza (FM).

Il sistema che realizza la modulazione in frequenza ha un comportamento descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$g(t) = A \cos \left( \omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t f(\tau) d\tau \right).$$

Per semplicità di trattazione, in questo paragrafo supporremo che il segnale di ingresso  $f(t)$  sia normalizzato, e che quindi  $|f(t)| \leq 1$ . I parametri  $A$ ,  $\Delta\omega$  e  $\omega_0$  sono numeri positivi arbitrari, in cui ipotizziamo tuttavia che  $\Delta\omega$ , detto indice di modulazione, sia molto minore di  $\omega_0$ . Questo fa sì che il termine  $\omega_0 + \Delta\omega f(t)$  risulti sempre positivo.

Osserviamo che:

1. Il sistema che realizza la FM non è lineare, contrariamente a quel che accadeva per la AM; un sinonimo spesso usato in luogo di FM è infatti quello di "modulazione non lineare".
2. Per un segnale di tipo  $\cos m(t)$  è possibile introdurre il concetto di frequenza istantanea  $\omega_i(t)$  al tempo  $t$ , data da:

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt} m(t).$$

A giustificazione del nome "frequenza istantanea", osserviamo che se  $m(t) = \omega_0 t + B$ , la frequenza istantanea è costante nel tempo e coincide con la frequenza  $\omega_0$ .

La frequenza istantanea del segnale  $g(t) = A \cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t f(\tau) d\tau)$  modulato in FM risulta:

$$\omega_i(t) = \omega_0 + \Delta\omega f(t).$$

Il segnale modulato ha quindi un incremento di frequenza istantanea proporzionale al segnale in ingresso, ed il coefficiente  $\Delta\omega$  è la costante di proporzionalità; le frequenze istantanee, inoltre, assumono valori in un intorno di  $\omega_0$ , variando da  $\omega_0 - \Delta\omega$  a  $\omega_0 + \Delta\omega$ .

Discutiamo ora brevemente i seguenti due punti:

1. determinare la banda su cui un segnale a banda limitata da  $W$  viene rilocato dalla modulazione in frequenza;
2. determinare un sistema che permetta di ricostruire un dato segnale a partire dal segnale modulato in frequenza (demodulazione).

### Ampiezza della Banda

Abbiamo visto che la AM con parametro  $\omega_0$  riloca un segnale a banda limitata da  $W$  sulla banda centrata intorno a  $\omega_0$  e di larghezza  $2W$ ; lo stesso segnale viene rilocato dalla FM con parametri  $\omega_0$  e  $\Delta\omega$  nella banda di frequenza centrata attorno a  $\omega_0$  e di larghezza  $\Delta$  data dalla regola di Carlson (vedi anche Figura 2.24):

$$\Delta = 2W(1 + \beta),$$

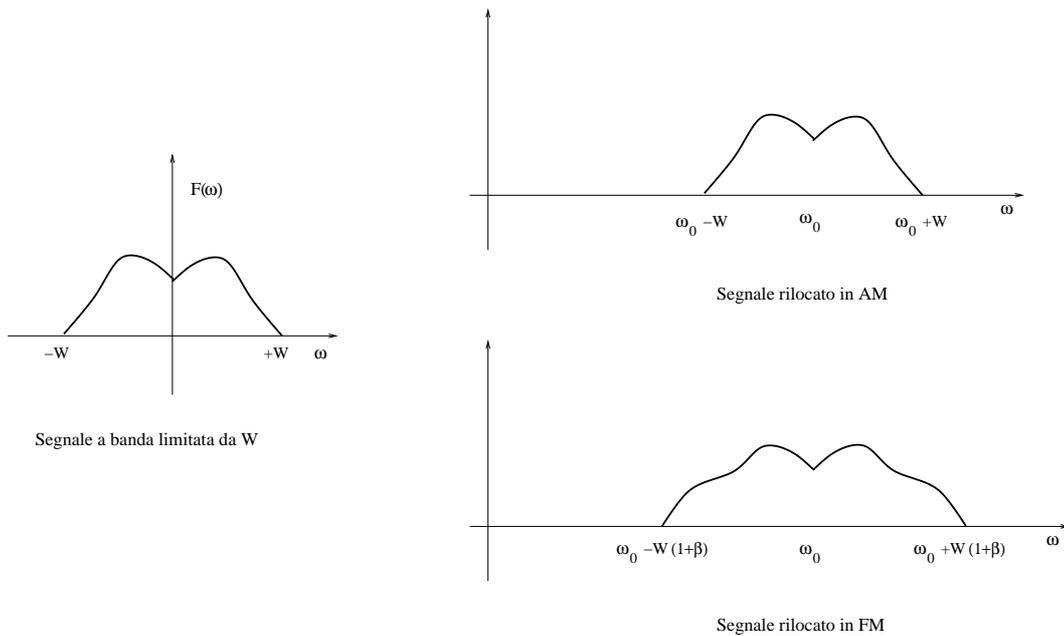


Figura 2.24 Modulazione in AM e in FM.

con  $\beta = \frac{\Delta\omega}{W}$ .

Due casi particolarmente interessanti sono:

1. *Modulazione in frequenza a banda stretta*, in cui  $\beta \approx 0$  (in pratica  $\beta < 0.2$ ).

In questo caso la regola di Carson dà:

$$\Delta \approx 2W.$$

La FM a banda stretta si comporta quindi come la AM per quanto riguarda l'occupazione di banda.

2. *Modulazione in frequenza a banda larga*, in cui  $\beta \gg 1$ .

In questo caso la regola di Carson dà:

$$\Delta \approx 2W\beta = 2\Delta\omega.$$

Poiché  $\Delta \gg 2W$ , in questo caso la FM utilizza più banda della AM.

Allo scopo di fornire una giustificazione delle precedenti affermazioni, consideriamo un segnale a banda limitata da  $W$  che, per semplicità, scegliamo essere  $\cos Wt$ . Il segnale modulato risulta allora essere:

$$\cos\left(\omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t \cos W\tau d\tau\right) = \cos(\omega_0 t + \beta \sin Wt).$$

Applicando la formula trigonometrica del coseno della somma, il segnale modulato può essere infine descritto:

$$\cos \omega_0 t \cos(\beta \sin Wt) - \sin \omega_0 t \sin(\beta \sin Wt). \quad (2.28)$$

La (2.28) mostra che il segnale modulato in frequenza è essenzialmente la somma delle modulazioni in ampiezza dei segnali  $\cos(\beta \sin Wt)$  e  $\sin(\beta \sin Wt)$ : se proviamo che  $\cos(\beta \sin Wt)$  e  $\sin(\beta \sin Wt)$  sono segnali a banda limitata da un opportuno  $M$ , possiamo concludere che il segnale a banda limitata da  $W$  viene rilocato dalla FM nella banda  $\omega_0 - M \leq |\omega| \leq \omega_0 + M$ .

Nel caso della modulazione in frequenza a banda stretta, essendo  $\beta \approx 0$  possiamo approssimare:

$$\cos(\beta \sin Wt) \approx 1, \quad \sin(\beta \sin Wt) \approx \beta \sin Wt.$$

Allora  $M = W$  e l'ampiezza di banda del segnale modulato è  $2W$ , in accordo alla regola di Carson.

Nel caso della modulazione in frequenza a banda larga, si può osservare che le funzioni  $\cos(\beta \sin Wt)$  e  $\sin(\beta \sin Wt)$  sono funzioni periodiche di periodo  $T = 2\pi/W$ . Esse possono essere espanse in serie di Fourier ed approssimate restringendo la serie alle componenti armoniche più significative. Osservando che  $\cos(\beta \sin Wt)$  è una funzione pari e che  $\sin(\beta \sin Wt)$  è una funzione dispari, si ha:

$$\begin{aligned} \cos(\beta \sin Wt) &= J_0(\beta) + \sum_{n \leq 2, n \text{ pari}} J_n(\beta) \cos(nWt), \\ \sin(\beta \sin Wt) &= \sum_{n \leq 1, n \text{ dispari}} J_n(\beta) \cos(nWt), \end{aligned}$$

dove i coefficienti  $J_n(\beta)$ , dipendenti da  $\beta$ , sono:

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\beta \sin t - nt)} dt.$$

Le funzioni  $J_n(\beta)$ , dette funzioni di Bessel di prima specie, sono ben studiate per il loro interesse in fisica-matematica. Fissato  $\beta \gg 1$ , è in particolare noto che  $J_n(\beta) \approx 0$  per  $n > \beta$ : la componente armonica di maggior frequenza significativamente presente nelle espansioni in serie di  $\cos(\beta \sin Wt)$  e  $\sin(\beta \sin Wt)$  si ha in corrispondenza di  $n = \beta$ , ed è quindi  $\cos(\beta Wt)$ , con frequenza  $M = \beta W = \Delta\omega$ . Questo implica che, se  $\beta \gg 1$ , la larghezza di banda del segnale modulato è  $2\Delta\omega$ , in accordo con la regola di Carson.

## Demodulazione

La frequenza istantanea del segnale ottenuto modulando in frequenza  $f(t)$  è data da:

$$\omega_i(t) = \omega_0 + \Delta\omega f(t).$$

In altre parole, la frequenza istantanea coincide con  $f(t)$ , a meno di una traslazione e di un fattore di scala.

Per demodulare in frequenza è quindi sufficiente costruire un sistema che, avendo in ingresso un segnale del tipo  $\cos m(t)$ , dà in uscita la sua frequenza istantanea  $\omega_i(t) = \frac{d}{dt}m(t)$ .

Sistemi con questo tipo di comportamento sono detti *discriminatori di frequenza*: in Figura 2.25 viene mostrato il processo di modulazione, trasmissione e demodulazione in frequenza.

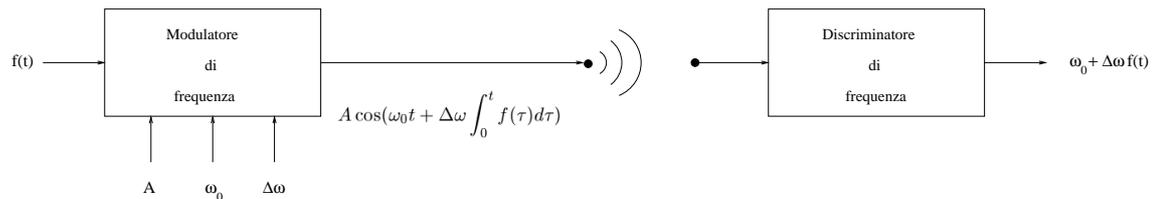


Figura 2.25 Modulatore e discriminatore di frequenza.

In linea di principio, per ottenere un discriminatore di frequenza si può considerare il sistema differenziatore che, avendo in ingresso il segnale  $m(t)$ , dà in uscita il segnale  $\frac{d}{dt}m(t)$ .

Ponendo in ingresso a tale sistema il segnale modulato

$$A \cos \left( \omega_0 t + \Delta \omega \int_0^t f(\tau) d\tau \right),$$

si ottiene in uscita il segnale

$$A(\omega_0 + \Delta \omega f(t)) \sin \left( \omega_0 t + \Delta \omega \int_0^t f(\tau) d\tau \right).$$

Si osservi che questo segnale è il prodotto di una funzione  $m(t) = A(\omega_0 + \Delta \omega f(t))$ , sempre positiva poiché  $\Delta \omega \ll \omega_0$ , per una funzione  $s(t) = \sin(\omega_0 t + \Delta \omega \int_0^t f(\tau) d\tau)$  che è approssimativamente una sinusoidale di frequenza  $\omega_0$ , e più precisamente con frequenze istantanee comprese tra  $\omega_0 t - \Delta \omega$  e  $\omega_0 t + \Delta \omega$ . La Figura 2.26 evidenzia che il segnale  $m(t)$  corrisponde all'involuppo di  $m(t)s(t)$ .

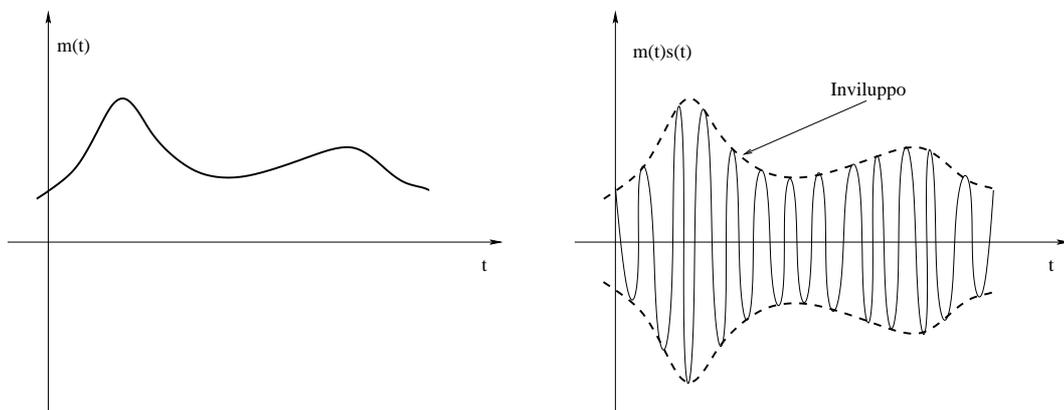


Figura 2.26 Principio per la demodulazione in frequenza.

Il segnale  $m(t)$  può allora essere ricostruito determinando l'involuppo di  $m(t) \sin(\omega_0 t + \Delta \omega \int_0^t f(\tau) d\tau)$  mediante un rivelatore di involuppo del tipo di quello rappresentato in Figura 2.23. Un discriminatore di frequenza può quindi essere ottenuto dalla composizione di un differenziatore e di un rivelatore di involuppo.

**Esempio 2.8.1.**

Le trasmissioni radio commerciali in modulazione di frequenza avvengono in banda VHF, cioè con frequenze comprese tra 30 MHz e 300 MHz.

L'indice di modulazione utilizzato  $\Delta f (= \frac{\Delta\omega}{2\pi})$  è di 75 kHz e ogni stazione ha a disposizione una banda di 200 kHz: ogni stazione può quindi spedire segnali limitati in frequenza a 15 kHz e modulati in FM a banda larga.

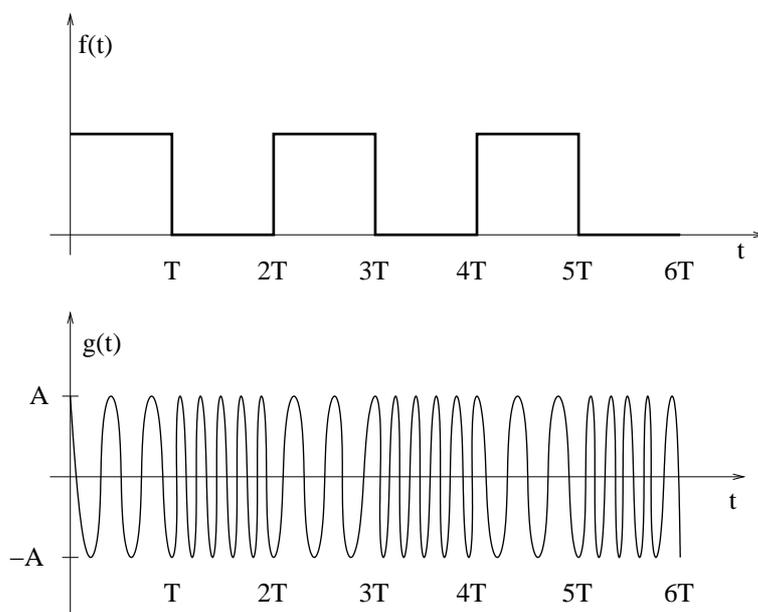
Infatti, per tali segnali,  $\beta = \frac{75}{15} = 5$ , quindi la modulazione è a banda larga; applicando inoltre la regola di Carson, il segnale viene rilocato su una banda di larghezza uguale a  $2 \cdot 15 \cdot (1 + 5) = 180$  kHz, minore della banda di 200 KHz disponibile.

**Esempio 2.8.2.**

Quando la modulazione in frequenza è utilizzata per la trasmissione di segnali digitali (segnali a due valori, per esempio 0 e 1), la tecnica di modulazione viene detta FSK (*frequency shift keying*). La modulazione FSK è realizzata dal sistema che, avendo in ingresso un segnale  $f(t)$  a valori 0 o 1, dà in uscita il segnale  $g(t)$  tale che:

$$g(t) = \begin{cases} A \cos \omega_1 t, & \text{se } f(t) = 1 \\ A \cos \omega_2 t, & \text{se } f(t) = 0. \end{cases}$$

In Figura 2.27 viene riportata la modulazione FSK  $g(t)$  del segnale  $f(t)$  consistente in una sequenza alternata di 1 e 0; si assume che  $\omega_1 = \frac{4\pi}{T}$  e  $\omega_2 = \frac{8\pi}{T}$ .



**Figura 2.27** Modulazione FSK.

La massima frequenza  $W$  significativamente presente nel segnale  $f(t)$  è  $W = \frac{4\pi}{T}$ . La larghezza di banda su cui viene rilocato  $f(t)$  è ottenuta osservando che la frequenza istantanea  $\omega_i(t)$  assume i due valori  $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$  e  $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$ .

Ne consegue che  $\omega_0 = \frac{6\pi}{T}$  e  $\Delta\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ; poichè  $\beta = \frac{\Delta\omega}{W} = \frac{1}{2}$ , applicando la regola di Carson si ricava che la larghezza di banda BW è approssimativamente:

$$BW = 2W(1 + \beta) \approx \frac{12\pi}{T}.$$

Esistono vari metodi di demodulazione per segnali modulati FSK. Una semplice tecnica, illustrata in Figura 2.28, consiste nell'applicare al segnale modulato in parallelo due filtri passabanda centrati rispettivamente su  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , e nel confrontare gli inviluppi dei segnali così ottenuti.

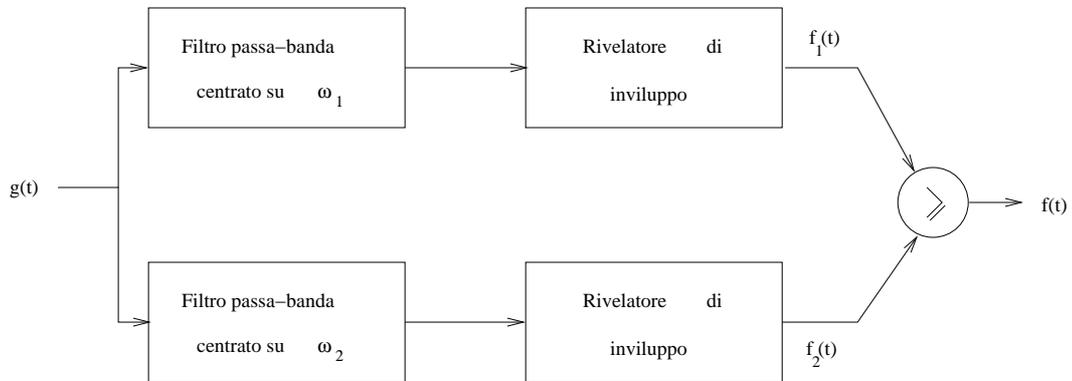


Figura 2.28 Demodulazione di un segnale modulato FSK.

## 2.9 Algoritmi in Matlab

### Calcolo approssimato della trasformata

Non è possibile calcolare in senso stretto la trasformata di un segnale continuo mediante algoritmi di calcolo numerico, il solo modo che abbiamo per trattare il questo problema di approssimazione è di campionare il segnale  $f(t)$  su una griglia sufficientemente fine di tempi con granularità  $\Delta t$  per un intervallo di tempo di misura  $D$  sufficientemente grande (intervallo in cui si concentra la maggior parte dell'energia del segnale). Ponendo l'origine in  $t = 0$ , si ricava il segnale a tempo discreto:

$$x(n) = f(t_n), \quad \text{con } t_n = n\Delta t \in (0, D).$$

Esso è un vettore  $x = [x(0), \dots, x(N-1)]$  di dimensione finita  $N = \frac{D}{\Delta t}$  che verrà usato per simulare il segnale analogico  $f(t)$  sull'intervallo di tempo stabilito. Possiamo dunque approssimare la trasformata di Fourier come segue:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\omega t_n} \Delta t,$$

dove si è introdotta un'approssimazione di ordine zero consistente nell'assumere  $f(t)$  costante ed uguale a  $f(t_n)$  nell'intervallo  $n\Delta t < t < (n+1)\Delta t$ ; pertanto, in questo intervallo, l'integrale è rappresentato dall'area del rettangolo  $\Delta t x(n) e^{-i\omega t_n}$  in campo complesso.

Le considerazioni fatte per il tempo valgono anche per le frequenze: non potendo calcolare un continuo di frequenze (banda) per le quali assume significato la funzione  $F(\omega)$ , ci dobbiamo limitare alle frequenze definite su una griglia finita di valori  $\omega_1, \dots, \omega_M$  con granularità  $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k$ .

Come noto, esistono precise relazioni di reciprocità che fanno corrispondere al dominio temporale  $(0, D)$  il dominio frequenziale  $(0, \Omega)$ , che si ricavano ipotizzando una ripetizione periodica del segnale  $f(t)$  ristretta all'intervallo  $(0, D)$ . Questo consente l'espansione in serie di Fourier del segnale reso periodico di periodo  $D$ .

Affrontiamo qui il problema di calcolare in modo approssimato la trasformata del segnale impulso triangolare mediante una sovrapposizione finita di fasori "campionati" nel dominio delle frequenze.

L'impulso triangolare di durata  $2T$  e altezza unitaria è definito da:

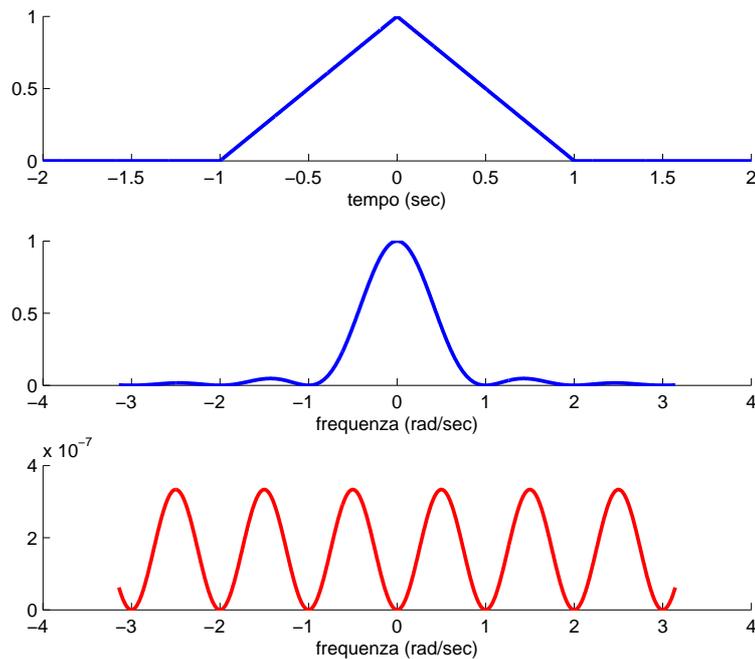
$$\Lambda(t/T) = \begin{cases} 1 - |t|/T, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}.$$

La sua trasformata esiste ed è data dalla somma di due integrali:

$$F(\omega) = \int_{-1}^0 (1 + t/T)e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 (1 - t/T)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.29)$$

Sfruttando le proprietà delle trasformate viste nel capitolo, possiamo evitare di calcolare gli integrali nella (2.29) e derivare direttamente l'equazione di analisi per l'impulso triangolare ricorrendo alla convoluzione dell'impulso rettangolare unitario o con se stesso o all'integrazione del medesimo. In entrambi i casi si giunge a derivare la coppia trasformata-antitrasformata di un impulso triangolare di durata  $2T$  riportata di seguito:

$$\Lambda(t/T) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T\omega}{2}\right).$$



**Figura 2.29** Il primo grafico mostra un impulso triangolare di durata 2 sec, il secondo grafico mostra la sua trasformata trasformata. Il terzo riporta l'errore che si commette rispetto a quella "esatta", cioè derivata analiticamente.

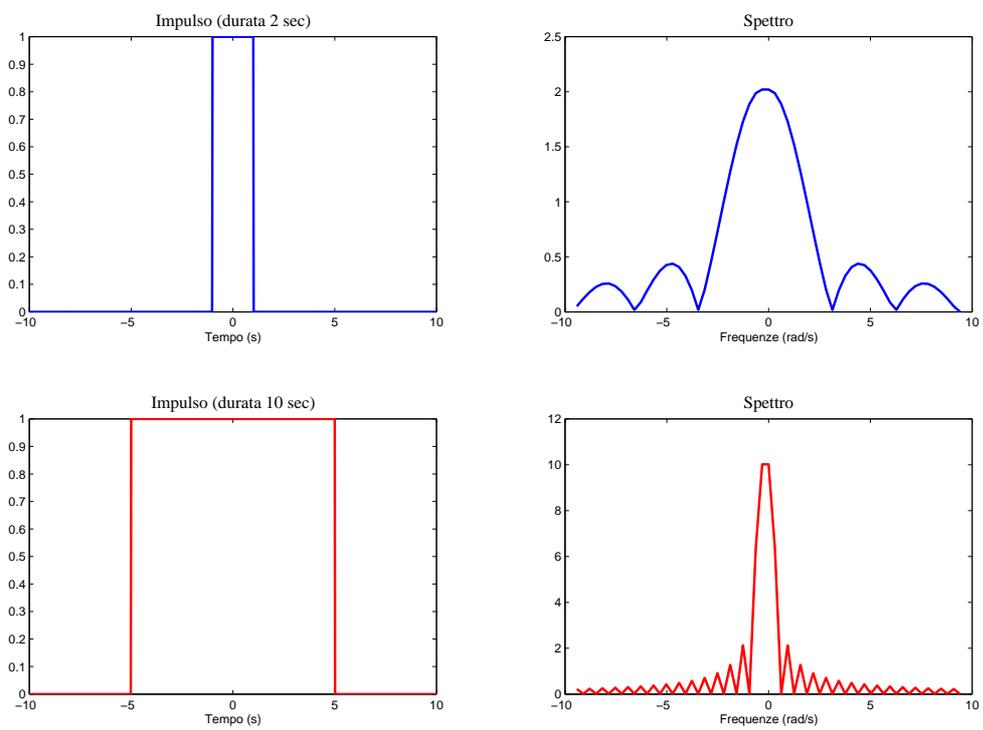
### Dualismo tempo-frequenza

Il seguente programma Matlab mette in evidenza il rapporto duale che esiste tra tempo e frequenza: a fronte di una maggiore "concentrazione" nel tempo si ha una maggiore "dilatazione" nelle frequenze e viceversa, maggiore è la "concentrazione" nelle frequenze, maggiore è la "dilatazione" nel tempo. Per illustrare questa attitudine il programma confronta lo spettro di due impulsi rettangolari di durata diversa e in particolare, nella Figura 2.30 è riportato lo spettro di due impulsi in cui la durata del secondo è dieci volte la durata del primo.

**MATLAB**

```
function fft_rect(T1,T2)
% Confronta la trasformata di Fourier di due impulsi rettangolari distinti
% T1: durata del primo impulso - T2: durata del secondo impulso
%-----
tmax = max([T1 T2]);
dt = 2*tmax/1000;
t = -tmax:dt:tmax;
p1 = zeros(size(t));
p2 = zeros(size(t));
w1 = T1/dt;
w2 = T2/dt;
for n = 501-round(w1/2):501+round(w1/2)
    p1(n) = 1;
end
```

```
for n = 501-round(w2/2):501+round(w2/2)
    p2(n) = 1;
end
% Calcolo della trasformata approssimata
F1 = fft(p1);
F2 = fft(p2);
% Vettore delle frequenze
wlim = round(3*1001*dt/min([T1 T2]));
w = (2*pi/(1001*dt))*[-wlim:1:wlim];
P1 = zeros(size(w));
P2 = zeros(size(w));
mid = fix(length(w)/2);
% Shift della trasformata
for n = 1:mid;
    P1(n+mid) = F1(n);
    P2(n+mid) = F2(n);
    P1(mid+1-n) = F1(n);
    P2(mid+1-n) = F2(n);
end
end
% Riscalatura e plot
subplot(2,2,1), plot(t,p1); xlabel('Tempo (s)'); title(['Impulso (durata ',num2str(T1),' sec)'])
subplot(2,2,3), plot(t,p2,'r'); xlabel('Tempo (s)'); title(['Impulso (durata ',num2str(T2),' s)'])
P1p = dt*abs(P1);
P2p = dt*abs(P2);
subplot(2,2,2), plot(w,P1p); xlabel('Frequenze (rad/s)'); title('Spettro')
subplot(2,2,4), plot(w,P2p,'r'); xlabel('Frequenze (rad/s)'); title('Spettro')
```



**Figura 2.30** Confronto tra spettri di due impulsi aventi durata, rispettivamente, 10 sec e 100 sec.

## Esercizi proposti

**Esercizio 2.1** Data la serie armonica

$$f(t) = \cos 2t + 3 \cos 4t,$$

mostrare che i coefficienti di Fourier in forma esponenziale sono:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0.5, \quad c_2 = 1.5, \quad c_k = 0 \quad \forall k \geq 3.$$

**Esercizio 2.2** Considerare la serie di Fourier per le seguenti funzioni periodiche

$$f(t) = \sin 4t + 3 \cos 8t + 5,$$

$$f(t) = \sin^2 t + 2 \cos t$$

$$f(t) = \cos^2 t,$$

$$f(t) = \cos 2t$$

$$f(t) = \sin 2t + 3 \cos t,$$

$$f(t) = (\sin 2t)(\cos t)$$

Per ognuna dare i coefficienti della serie di Fourier in forma esponenziale e in forma trigonometrica combinata.

**Esercizio 2.3** Determinare quali funzioni tra quelle date di seguito possono essere espresse in serie di Fourier.

$$f(t) = \sin 5t + \cos 3t$$

$$f(t) = \cos 6t + \sin 8t$$

$$f(t) = \cos t + \sin \pi t$$

$$f(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad \text{dove } x_1(t) = \sin \frac{\pi t}{6}, x_2(t) = \sin \frac{\pi t}{9}$$

Solo per quelle rappresentabili dare i coefficienti della serie di Fourier in forma esponenziale e in forma trigonometrica combinata.

**Esercizio 2.4** Un segnale periodico  $f(t)$  è espresso in serie di Fourier da

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}.$$

Mostrare che la serie di Fourier per  $g(t) = f(t - t_0)$  è data da

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_n e^{in\omega_0 t},$$

dove  $|\hat{c}_n| = |c_n|$  e  $\angle \hat{c}_n = \angle c_n - n\omega_0 t_0$ .

**Esercizio 2.5** Calcolare la trasformata di Fourier dei segnali:

$$f(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1),$$

$$f(t) = e^{-2|t-1|}$$

$$f(t) = \delta(t-1) + \delta(t+1),$$

$$f(t) = \frac{d}{dt}\{u(-2-t) + u(t-2)\}$$

e disegnare il grafico del modulo.

**Esercizio 2.6** Calcolare la trasformata inversa di Fourier di:

$$F(\omega) = \frac{i\omega}{(1+i\omega)(3+i\omega)},$$

$$F(\omega) = \frac{2+i\omega}{(1+i\omega)^2(3+i\omega)},$$

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega+4\pi) + \pi\delta(\omega-4\pi).$$

**Esercizio 2.7** Si consideri il segnale  $f(t) = (1+i)e^{2|t|/T+i2\pi|t|/T}$ , dove  $t \in \mathbb{R}$  e  $T$  è una costante positiva. Calcolare l'energia di  $f(t)$ .

## FILTRI ANALOGICI

I filtri ideali sono caratterizzati da funzioni di trasferimento a modulo costante in banda passante, nullo in banda proibita e fase lineare. Poiché tali filtri non sono causali, essi possono essere soltanto “approssimati” da filtri fisicamente realizzabili. Il problema della realizzazione di filtri per una data applicazione non è quindi banale, e richiede almeno tre passi per la sua soluzione:

1. l’individuazione delle *specifiche* del filtro data la particolare applicazione;
2. la determinazione della funzione di trasferimento di un filtro soddisfacente le specifiche individuate;
3. la realizzazione fisica di un sistema la cui funzione di trasferimento coincide con quella determinata.

La determinazione di specifiche sufficientemente precise è il primo passo per ottenere un filtro da adottare per una data applicazione. Al fine di descrivere le specifiche del filtro che si intende realizzare, è necessaria la conoscenza dei parametri che permettano di valutare la qualità dell’approssimazione rispetto a un filtro ideale, quali la *frequenza di taglio a 3 dB*, la *frequenza di stop*, l’ampiezza della *banda di transizione*, l’*attenuazione*, la *linearità della fase*.

L’individuazione del filtro viene poi ottenuta selezionando la funzione di trasferimento di un filtro causale che soddisfa le specifiche assegnate; in questo capitolo ci limitiamo a

richiamare la soluzione di questo problema all'interno delle famiglie di *filtri di Butterworth e di Chebyshev*.

L'ultima fase consiste nella realizzazione fisica del sistema di cui è nota la funzione di trasferimento. Le realizzazioni fisiche possono essere classificate sulla base delle componenti costituenti il sistema: filtri a elementi *RLC passivi*, filtri a elementi *RC attivi*, filtri a *microonde*, filtri a *cristallo*, filtri *elettromeccanici*. In questo capitolo accenniamo alle tecniche di analisi per circuiti RLC passivi, richiamando i principi di Kirchoff, e alla progettazione di filtri di Butterworth mediante circuiti a elementi attivi come gli amplificatori operazionali.

### 3.1 Caratteristiche dei Filtri Analogici

Nel Capitolo 2 abbiamo introdotto la nozione di filtro ideale e delineato le principali tipologie: filtro passabasso, passaalto e passabanda. In questo paragrafo studiamo la realizzazione pratica di filtri ideali; faremo riferimento esclusivamente a filtri passabasso, poiché le considerazioni riportate di seguito possono essere estese senza difficoltà agli altri casi.

I grafici (modulo e fase) della tipica funzione di trasferimento di un filtro ideale sono riportati in Figura 3.1.

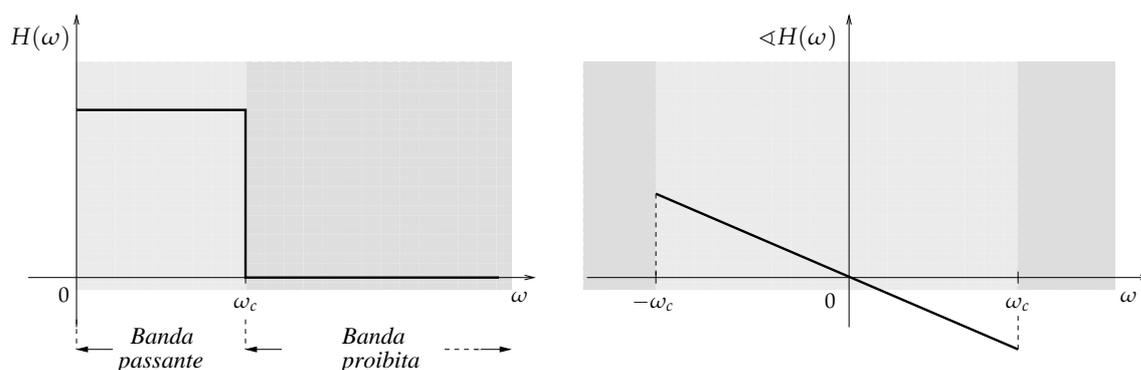


Figura 3.1 Modulo e fase della funzione di trasferimento di un filtro ideale con frequenza di taglio  $\omega_c$ .

La funzione di trasferimento  $H(\omega)$  di un filtro ideale passabasso possiede le seguenti caratteristiche:

1.  $|H(\omega)|$  è costante nella banda passante ed è identicamente nullo nella banda proibita;
2. la banda passante e la banda proibita sono confinanti (separate dalla frequenza di taglio);
3. la risposta in fase  $\angle H(\omega)$  è lineare; questo significa che le varie componenti armoniche nella banda passante hanno tutte lo stesso ritardo temporale.

Purtroppo la risposta all'impulso di un sistema che realizza un filtro ideale è del tipo  $\text{sinc}(\omega_c t)$ ; essa assume valori differenti da 0 per  $t < 0$  e quindi tale sistema risulta essere non causale. Questo significa che ogni sistema realizzabile non potrà mai verificare contemporaneamente le caratteristiche 1., 2. e 3.; in questo paragrafo introduciamo alcuni parametri che descrivono la "bontà" con cui un filtro realizzabile in pratica approssima un filtro ideale.

Indicando con  $H(\omega)$  la funzione di trasferimento di un eventuale filtro passabasso realizzabile, sappiamo che  $H(\omega)$  è completamente specificata dal suo modulo  $|H(\omega)|$  e dalla sua fase  $\angle H(\omega)$ . La Figura 3.2 mostra la tipica forma di  $|H(\omega)|$  e  $\angle H(\omega)$  per un filtro passabasso realizzabile.

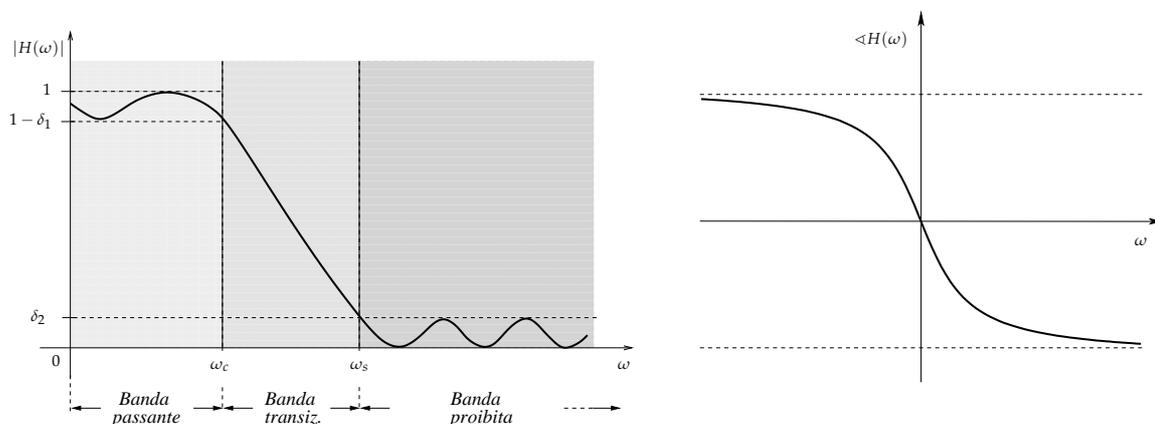


Figura 3.2 Modulo e fase di un filtro passabasso realizzabile.

Rispetto a un filtro ideale possiamo rilevare le seguenti differenze.

1. L'ampiezza  $|H(\omega)|$  non è costante nella banda passante e non è identicamente nulla nella banda proibita; si possono rilevare inoltre oscillazioni (ripple) di ampiezza non trascurabile sia nella banda passante che in quella proibita. Un parametro importante è l'ampiezza della massima oscillazione in banda proibita  $\delta_2$ , o equivalentemente, l'attenuazione  $-20 \log_{10} \delta_2$  dB.
2. La banda passante e la banda proibita non confinano, ma sono separate da una banda detta *banda di transizione*. Parametri importanti sono la frequenza di taglio  $\omega_c$  a 3 dB, la frequenza di stop  $\omega_s$  e la dimensione della banda di transizione  $\omega_s - \omega_c$ .
3. La fase  $\angle H(\omega)$  non risulta essere lineare.

Analizziamo ora separatamente il significato fisico del modulo e della fase della funzione di trasferimento di un filtro.

### Guadagno

Osserviamo innanzitutto che  $|H(\omega)|$  è collegato al concetto di *guadagno*. A tal riguardo ricordiamo che se  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$  sono le trasformate di Fourier rispettivamente dell'ingresso e dell'uscita di un sistema con funzione di trasferimento  $H(\omega)$ , vale che

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega).$$

Questo implica:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{|G(\omega)|^2}{|F(\omega)|^2} = \frac{|G(\omega)|^2 d\omega}{|F(\omega)|^2 d\omega},$$

dove  $|G(\omega)|^2 d\omega$  e  $|F(\omega)|^2 d\omega$  rappresentano la potenza (o l'energia) delle componenti a frequenza tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  rispettivamente nel segnale di uscita e in quello di ingresso;

$|H(\omega)|^2$  individua allora il *guadagno*, cioè il rapporto tra la potenza (o l'energia) del segnale in uscita e quello in ingresso alle varie frequenze.

Si osservi che per filtri senza oscillazioni in banda proibita, l'attenuazione risulta essere  $-g(\omega_s)$ , dove  $\omega_s$  la frequenza di stop. In molte applicazioni, anziché considerare direttamente il grafico di  $|H(\omega)|$ , si preferisce dare il grafico del guadagno  $|H(\omega)|^2$  in scala logaritmica; il guadagno può essere pertanto convertito nel seguente numero  $g(\omega)$  di decibel:

$$g(\omega) = 10 \log_{10} |H(\omega)|^2 \text{ dB} = 20 \log_{10} |H(\omega)| \text{ dB}.$$

### Esempio 3.1.1.

Un sistema che a una data frequenza  $\omega$  converte un ingresso  $F(\omega)$  di 5 V in una uscita  $G(\omega)$  di 1 V, ha un guadagno a quella frequenza dato in dB da:

$$20 \log_{10} \frac{1}{5} \text{ dB} = -13.97 \text{ dB}.$$

Poiché in un filtro realizzabile la banda passante e quella proibita non confinano, bisogna attribuire un significato convenzionale alla frequenza di taglio. Una usuale nozione è quella di *frequenza di taglio a 3dB*, cioè la frequenza per la quale si ha un guadagno del 50% di quello in banda passante, che misurato in decibel equivale a

$$20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ dB} \approx -3 \text{ dB}.$$

Se  $|H(\omega)| \approx 1$  in banda passante, allora la frequenza di taglio a 3 dB è quella frequenza  $\omega_c$  per cui:

$$|H(\omega_c)|^2 = \frac{1}{2}.$$

### Esempio 3.1.2.

Determinare la frequenza di taglio a 3 dB del filtro passabasso con guadagno

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(1 + \omega^2/100)}.$$

Il guadagno in banda passante 1 e la frequenza di taglio  $\omega_c$  quella per cui  $\frac{1}{(1 + \omega^2/100)} = 1/2$ . Risolvendo l'equazione si ottiene  $\omega_c = 10$  Hz.

Un utile nozione che permette di coprire grandi range di frequenze quella di *decade*: una decade è un intervallo tra una frequenza  $\omega$  e  $10\omega$ . La misura di attenuazione di un filtro è data usualmente in dB/decade:  $\alpha$  dB/decade significa che il filtro ha un'attenuazione di  $\alpha$  dB ogni decade di frequenza.

**Esempio 3.1.3.**

Si consideri un filtro con funzione di trasferimento  $H(\omega)$  tale che

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2N}}.$$

Vale che:

$$10 \log_{10} |H(\omega)|^2 = -20 \log_{10}(1 + \omega^{2N}) \approx -20N \log_{10} \omega, \quad (\text{per } \omega \text{ suff. grande}).$$

L'attenuazione in banda proibita allora:

$$20N \log_{10} 10\omega - 20N \log_{10} \omega = 20N \text{ dB/decade}.$$

Un filtro non ha virtualmente attenuazione nella banda passante, mentre l'attenuazione in banda proibita è un importante parametro di prestazione del filtro. La banda proibita è data dall'insieme delle frequenze per le quali il guadagno è inferiore a una opportuna soglia di attenuazione che normalmente viene stabilita in funzione della particolare applicazione. Se indichiamo con  $\omega_s$ , come in Figura 3.2, la frequenza di stop, cioè la frequenza di inizio della banda proibita, le frequenze tra  $\omega_c$  ed  $\omega_s$  costituiscono la banda di transizione.

**Esempio 3.1.4.**

Si consideri il filtro con funzione di trasferimento

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/100)^8}.$$

Determinare l'ampiezza della banda di transizione sapendo che la frequenza di stop corrisponde ad un'attenuazione di 40 dB.

La frequenza di taglio a 3 dB di 100 Hz. La frequenza di stop  $\omega_s$  verifica per ipotesi

$$40 = -20 \log_{10} |H(\omega_s)|.$$

Risolvendo tale equazione si ottiene  $\omega_s \approx 316$  Hz. La dimensione della banda di transizione risulta  $316 - 100 = 216$  Hz.

**Linearità della fase**

Discutiamo ora l'effetto prodotto dalla non linearità della fase della funzione di trasferimento del filtro. A tal riguardo, consideriamo per semplicità un sistema che ammette una funzione di trasferimento con modulo  $|H(\omega)| = G(\omega)$  e fase  $\angle H(\omega) = \phi(\omega)$ , così che:

$$H(\omega) = G(\omega)e^{i\phi(\omega)}.$$

Il segnale (complesso)  $e^{i\omega_1 t}$  di frequenza  $\omega_1$  viene trasformato dal sistema nel segnale  $G(\omega_1)e^{i(\omega_1 t + \phi(\omega_1))}$ . Se la fase lineare, cioè  $\phi(\omega) = -t_0\omega$  per un'opportuna costante  $t_0 \in \mathbb{R}$ , il segnale di uscita

$$G(\omega_1)e^{i\omega_1(t-t_0)}.$$

Il segnale di uscita risulta allora essere lo stesso segnale di ingresso ritardato di un tempo  $t_0$ , qualsiasi sia la frequenza  $\omega_1$ : una fase lineare comporta un ritardo temporale uguale per tutte le componenti armoniche.

Una fase non lineare crea invece ritardi differenti per le componenti a diversa frequenza, creando una distorsione complessiva del segnale. Per certe applicazioni (ad esempio nei modem) le distorsioni create dalla non linearità della fase devono essere eliminate quanto più possibile; in altre applicazioni la non linearità può essere utilizzata per dar luogo a effetti speciali.

## 3.2 Famiglie di Filtri Causali

Abbiamo visto che un filtro ideale non è causale e quindi può essere soltanto approssimato con filtri realizzabili fisicamente. A questo riguardo abbiamo introdotto parametri che denotano la bontà nell'approssimarne il guadagno (dimensione della banda di transizione, attenuazione, oscillazioni) o la fase (linearità).

La progettazione di un filtro è fortemente dipendente dall'applicazione; in certi casi (per esempio nei sistemi audio) è richiesta un'ottima risposta in fase. In altre applicazioni la linearità della fase è di scarso rilievo, mentre critica è l'accuratezza nell'approssimare il guadagno, e così via.

In aiuto al progettista, sono state introdotte e analizzate varie classi di filtri usualmente disponibili in sistemi di calcolo automatico per la progettazione, l'implementazione e la simulazione di filtri, quali ad esempio le primitive in ambiente MATLAB. Le principali famiglie sono quella dei filtri di *Butterworth*, di *Chebyshev*, di *Cauer* (o *ellittici*) e di *Bessel*. In Tabella 3.1 mostrata una grossolana valutazione comparativa della bontà di questi filtri (a parità di ordine); analizzeremo poi più in dettaglio le classi di filtri di Butterworth e Chebyshev.

Tabella 3.1 Caratteristiche qualitative di famiglie di filtri.

Filtro	Accuratezza guadagno	Linearità fase
Butterworth	media	media
Chebyshev	buona	cattiva
Ellittico	ottima	pessima
Bessel	cattiva	buona

### 3.2.1 Filtri di Butterworth

I filtri di Butterworth costituiscono una famiglia di filtri che soddisfa bene i requisiti sul guadagno in banda passante e meno bene in banda di transizione. Sebbene non esibiscano una fase lineare in banda passante, l'approssimazione non è troppo cattiva e sono tra i più semplici filtri elettronici da realizzare. Un filtro di Butterworth è caratterizzato da 2 parametri: l'ordine  $N$  e frequenza di taglio  $\omega_c$ .

La forma generale del modulo della funzione di trasferimento di un filtro di Butterworth di ordine  $N$  e frequenza di taglio  $\omega_c$  è:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|B_N(i\frac{\omega}{\omega_c})|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

dove  $B_N(s)$  è un opportuno polinomio detto  $N$ -esimo polinomio di Butterworth, mentre la scalatura  $\omega/\omega_c$  rispetto a  $\omega$  denota la frequenza normalizzata alla frequenza di taglio.

Si può dimostrare che, se  $N$  è pari, il polinomio  $B_N(s)$  è dato dal prodotto di  $N/2$  polinomi di secondo grado del tipo  $s^2 + bs + s$  con  $b > 0$ , mentre se  $N$  è dispari allora è presente anche il fattore  $s + 1$ . La Tabella 3.2 mostra la fattorizzazione dei primi otto

polinomi di Butterworth. Una proprietà interessante è che tutti i polinomi hanno le radici che giacciono sul cerchio di raggio unitario.

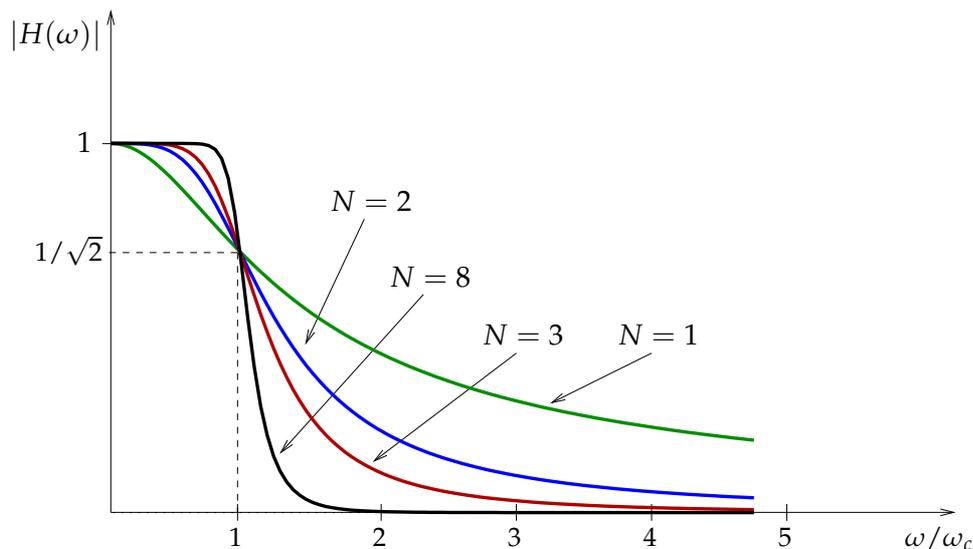
**Tabella 3.2** I primi otto polinomi di Butterworth fattorizzati.

---

$B_1(s) = s + 1$
$B_2(s) = s^2 + 1.414s + 1$
$B_3(s) = (s + 1)(s^2 + s + 1)$
$B_4(s) = (s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)$
$B_5(s) = (s + 1)(s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)$
$B_6(s) = (s^2 + 0.518s + 1)(s^2 + 1.414s + 1)(s^2 + 1.932s + 1)$
$B_7(s) = (s + 1)(s^2 + 0.445s + 1)(s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 1.802s + 1)$
$B_8(s) = (s^2 + 0.390s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 1.663s + 1)(s^2 + 1.962s + 1)$

---

La risposta in frequenza di alcuni filtri di Butterworth è riportata in Figura 3.3. Riguardo alla figura si possono fare le seguenti osservazioni:



**Figura 3.3** Risposta in frequenza di filtri di Butterworth.

- la frequenza di taglio a 3 dB  $\omega_c$ , è indipendentemente dall'ordine  $N$  del filtro;
- l'attenuazione nella banda proibita dipende da  $N$  in modo critico: risulta infatti un'attenuazione di  $20N$  dB per decade;
- non sono presenti oscillazioni né in banda passante né in banda proibita: il filtro di Butterworth è quello che presenta la maggior "piattezza" in banda passante.

In una tipica situazione di progetto, il parametro  $\omega_c$  è fissato essendo la frequenza di taglio desiderata, mentre l'ordine  $N$  viene scelto in modo tale da soddisfare la richiesta di attenuazione in banda proibita.

**Esempio 3.2.1.**

Determinare l'ordine di un filtro di Butterworth con frequenza di taglio di 100 Hz e frequenza di stop, con attenuazione a 40 dB, di 150 Hz.

Il guadagno di un filtro di Butterworth di ordine  $N$ , con frequenza di taglio pari a 100 Hz, è:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^{2N}}.$$

La frequenza di stop è per ipotesi la frequenza  $\omega_s$  che produce un'attenuazione di 40 dB, cioè:

$$20 \log_{10} |H(\omega_s)| = -40.$$

Si ottiene pertanto l'equazione:

$$20 \log_{10} \left( 1 + \left(\frac{150}{100}\right)^{2N} \right) = 40,$$

dalla quale si ricava che  $N \geq 5.68$ . Il filtro di ordine 6 soddisfa la specifica.

**3.2.2 Filtri di Chebyshev**

Nei filtri di Butterworth la funzione guadagno è monotona decrescente sia in banda passante che in quella proibita: un filtro di Butterworth quindi approssima bene un filtro ideale all'inizio della banda passante, ma l'approssima male alla fine della banda passante e in principio di quella proibita.

Un approccio più efficiente è quello di "distribuire" l'accuratezza dell'approssimazione uniformemente lungo tutta la banda passante o quella proibita: questo può essere ottenuto scegliendo un'approssimazione che ha oscillazioni della stessa ampiezza su tutta la banda passante o quella proibita.

Questa è l'idea base su cui è progettata la classe dei filtri di Chebyshev: il guadagno di un filtro di Chebyshev ha infatti oscillazioni di uguale ampiezza in banda passante ed è monotono decrescente in banda proibita, o viceversa. A parità di ordine, un filtro di Chebyshev ha banda di transizione più stretta e miglior attenuazione di quello di Butterworth; tuttavia i filtri di Chebyshev sono generalmente più complessi da realizzare di quelli di Butterworth e hanno una peggiore risposta in fase.

La forma generale del modulo della funzione di trasferimento di un filtro di Chebyshev di ordine  $N$  e frequenza di taglio  $\omega_c$  è:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}},$$

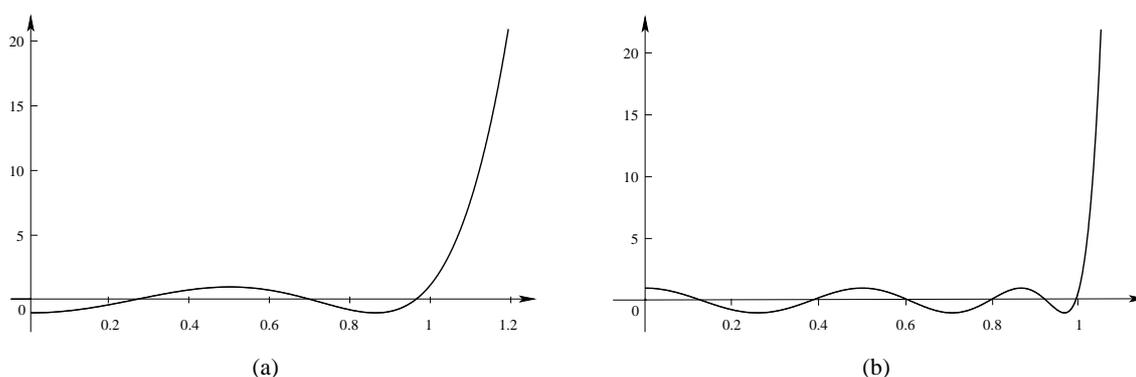
dove  $\varepsilon$  è una costante minore di 1 e  $C_N(v)$  è un opportuno polinomio chiamato polinomio di Chebyshev di ordine  $N$ . L'ennesimo polinomio di Chebyshev è definito come:

$$C_N(v) = \begin{cases} \cos(n \cdot \cos^{-1}(v)), & \text{se } 0 \leq v \leq 1 \\ \cosh(n \cdot \cosh^{-1}(v)), & \text{se } v > 1 \end{cases},$$

e può essere ottenuto dalla seguente equazione di ricorrenza:

$$C_N(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } N = 0 \\ v, & \text{se } N = 1 \\ 2vC_{N-1}(v) - C_{N-2}(v), & \text{se } N > 1 \end{cases}$$

I grafici dei polinomi  $C_6(v)$  e  $C_{12}(v)$  sono mostrati in figura 3.4.



**Figura 3.4** (a) Grafico del polinomio di Chebyshev  $C_6(v)$  e (b) del polinomio  $C_{12}(v)$ .

A giustificazione dell'equazione precedente possiamo definire innanzitutto la variabile  $\phi = \cos^{-1}(v)$ , così da poter scrivere  $C_N(v) = \cos(n\phi)$ . Sfruttando ora l'identità trigonometrica  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$ , si determina

$$\cos((n+1)\phi) + \cos((n-1)\phi) = 2\cos(n\phi)\cos(\phi).$$

Dalla posizione  $\phi = \cos^{-1}(v)$  si ricava dunque:

$$C_{N+1}(v) = 2vC_N(v) - C_{N-1}(v)$$

con cui generare i polinomi di qualunque ordine, come quelli riportati in Tabella 3.3.

**Tabella 3.3** I primi sei polinomi di Chebyshev.

$C_0 = 1$
$C_1 = v$
$C_2 = 2v^2 - 1$
$C_3 = 4v^3 - 3v$
$C_4 = 8v^4 - 8v^2 + 1$
$C_5 = 16v^5 - 20v^3 + 5v$
$C_6 = 32v^6 - 48v^4 + 18v^2 - 1$

In Figura 3.5 viene mostrata la risposta in frequenza di alcuni filtri di Chebyshev.

Si può osservare che il guadagno decresce molto rapidamente attorno alla frequenza di taglio anche per piccoli valori di  $N$  (per esempio  $N = 8$ ). Tuttavia questi filtri hanno lo svantaggio, rispetto a quelli di Butterworth, di presentare oscillazioni in banda passante

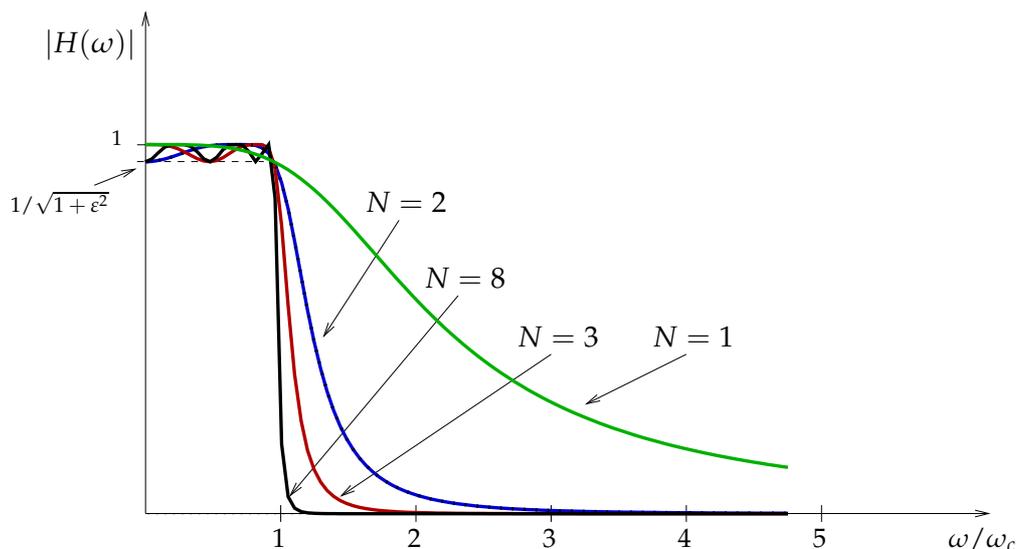


Figura 3.5 Risposta in frequenza di filtri di Chebyshev.

dipendenti da  $\varepsilon$ ; le oscillazioni hanno tutte la stessa ampiezza e sono sempre contenute nell'intervallo  $[1/\sqrt{1+\varepsilon^2}, 1]$ , indipendentemente dall'ordine del polinomio.

Riassumendo, un filtro di Chebyshev è specificato dai tre parametri:  $\varepsilon$ ,  $\omega_c$  e  $N$ ; in una tipica situazione di progetto il parametro  $\varepsilon$  determina l'ampiezza dell'oscillazione ammessa in banda passante, la frequenza  $\omega_c$  specifica la frequenza di taglio desiderata e l'ordine  $N$  viene scelto in modo da soddisfare la richiesta di attenuazione in banda proibita.

### Esempio 3.2.2.

Si determini l'ordine di un filtro di Chebyshev con un'ondulazione di 1 dB e in grado di fornire un'attenuazione di 40 dB in corrispondenza di  $\omega/\omega_c = 2$ . Si faccia riferimento alla banda passante del filtro a 3 dB.

Il parametro  $\varepsilon$  è legato all'ondulazione espressa in decibel consentita in banda passante  $\gamma$  come

$$\varepsilon^2 = 10^{\gamma/10} - 1.$$

Se  $\gamma = 1$  dB si ricava il valore massimo di oscillazione pari a  $\varepsilon = 0.5088$ .

Il guadagno in frequenza normalizzata invece risulta:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(v)}.$$

Un'attenuazione di 40 dB si ha quando  $|H(\omega)|^2 = 0.01$ , che implica risolvere

$$(0.01)^2 = \frac{1}{1 + (0.5088)^2 C_N^2(2)}.$$

Utilizzando la definizione di  $n$ -esimo polinomio di Chebyshev per  $v > 1$ , la soluzione dell'equazione precedente comporta la scelta del polinomio che in  $v = 2$  assume valore 196.5, che equivale a risolvere:

$$C_N(2) = \cosh(n \cdot \cosh^{-1}(2)) = 196.5.$$

Risolvendo rispetto a  $n$  otteniamo che l'intero  $n = 5$  soddisfa i requisiti.

### 3.3 Realizzazione di Filtri Analogici

Dato un filtro con risposta in frequenza  $H(\omega)$ , la sua realizzazione consiste nel progettare un circuito elettrico che, visto come sistema, ha  $H(\omega)$  come funzione di trasferimento. Questo circuito, dopo un accurato esame di sue eventuali imperfezioni come capacità parassite o altro, potrà essere implementato ottenendo la realizzazione fisica del filtro.

Le realizzazioni di filtri analogici possono essere classificate sulla base delle componenti costituenti; elenchiamo qui brevemente le principali classi con alcune caratteristiche.

**Filtri RLC passivi.** Essi consistono di componenti passive come induttanze, condensatori e resistenze. Per il loro funzionamento non richiedono potenza aggiuntiva, ma spesso esibiscono perdite significative in banda passante; la presenza di induttanze, inoltre, pone seri problemi alla loro miniaturizzazione. Lavorano bene fino a 500 Hz. Filtri RLC passivi saranno analizzati più in dettaglio in Sezione 3.3.1.

**Filtri RC attivi.** Questi filtri non contengono induttanze, ma resistenze, condensatori e amplificatori operazionali. Si prestano bene alla miniaturizzazione, ma richiedono potenza aggiuntiva. Lavorano bene da 1 Hz fino a 500 Hz. In Sezione 3.3.2 si analizza la realizzazione di filtri di Butterworth con componenti attive.

**Filtri a microonde.** Essi consistono di componenti passive come le linee di trasmissione, linee di trasmissione accoppiate e cavità risonanti. Non richiedono potenza aggiuntiva e sono utilizzate per filtri che lavorano sopra i 300 MHz.

**Filtri a cristallo.** Sono costituiti da risuonatori piezoelettrici ed lavorano dai 10 KHz ai 200 MHz. Con risuonatori di quarzo si possono realizzare filtri passabanda con ampiezza di banda veramente ristretta.

**Filtri elettromeccanici.** Sono costituiti da risuonatori meccanici: per prima cosa il segnale elettrico viene trasformato in vibrazioni meccaniche, viene poi applicato il filtro e infine il segnale è riconvertito in segnale elettrico. Questi filtri lavorano fino a 200 MHz.

Nel resto della sezione, analizziamo più in dettaglio i filtri RLC passivi e i filtri RC attivi.

#### 3.3.1 Circuiti ad Elementi Passivi

Un filtro analogico può essere realizzato mediante una rete di resistenze, induttanze e condensatori, detto anche circuito ad elementi passivi. Il sistema così ottenuto riceve in ingresso una tensione  $v(t)$  posta tra due punti della rete e dà in uscita una tensione  $u(t)$  misurata tra altri due punti della rete. Un esempio di circuito è mostrato in Figura 3.6

Gli elementi basilari di tali reti sono la resistenza, il condensatore e l'induttanza, rappresentati coi simboli mostrati in Figura 3.7.

Ponendo ai capi di tali elementi una tensione di  $v(t)$ , si crea una corrente di  $i(t)$  tale che:

- per la resistenza R vale:  $v(t) = Ri(t)$ ;
- per l'induttanza L vale:  $v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$ ;

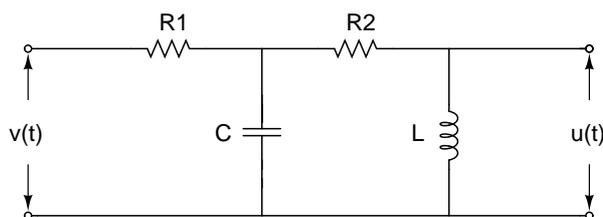


Figura 3.6 Circuito ad elementi passivi.

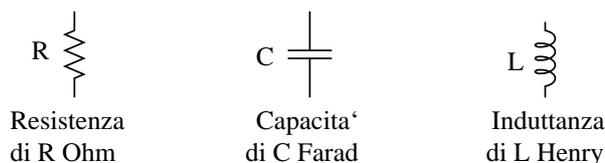


Figura 3.7 Resistenza, condensatore e induttanza.

- per il condensatore C vale:  $v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ .

Indicando ora con  $V(\omega)$  e  $I(\omega)$  rispettivamente la trasformata di Fourier di  $v(t)$  e  $i(t)$ , applicando le regole di derivazione e integrazione (vedi Tabella 2.2), le precedenti equazioni si riscrivono nella rappresentazione in frequenza come segue:

- per la resistenza R vale:  $V(\omega) = RI(\omega)$ ;
- per l'induttanza L vale:  $V(\omega) = i\omega LI(\omega)$ ;
- per il condensatore C vale:  $V(\omega) = \frac{1}{i\omega C} I(\omega)$ .

La relazione di ingresso-uscita di un circuito può essere ricavata risolvendo le equazioni ottenute dai due principi di Kirkoff:

- I. La somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti.
- II. La somma delle tensioni lungo un circuito chiuso è 0.

Detta  $V(\omega)$  la trasformata di Fourier dell'ingresso  $v(t)$  e  $U(\omega)$  la trasformata di Fourier dell'uscita  $u(t)$ , applicando i principi di Kirkoff nella rappresentazione in frequenza si ottiene in generale che:

$$U(\omega) = H(\omega)V(\omega),$$

dove  $H(\omega)$  dipende dalla struttura del circuito e può essere interpretata come la funzione di trasferimento di un sistema lineare tempo-invariante; in tal modo è possibile realizzare dei filtri lineari con reti a elementi passivi.

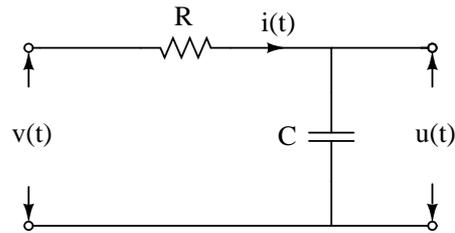


Figura 3.8 Circuito RC.

**Esempio 3.3.1.**

Analizziamo le caratteristiche del filtro ottenuto dal seguente circuito:

Applicando il principio II nella rappresentazione in frequenza, vale:

$$V(\omega) = RI(\omega) + \frac{1}{i\omega C}I(\omega).$$

Il comportamento del condensatore è dato da:

$$U(\omega) = \frac{1}{i\omega C}I(\omega).$$

Dividendo membro a membro le due uguaglianze precedenti, si ottiene la seguente funzione di trasferimento  $H(\omega)$ :

$$H(\omega) = \frac{U(\omega)}{V(\omega)} = \frac{1}{1 + i\omega RC}.$$

Risulta quindi che guadagno e fase siano:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}, \quad \angle H(\omega) = -\arctan RC\omega.$$

I grafici del guadagno e della fase sono dati in Figura 2.10; la rete precedentemente descritta implementa quindi un filtro passabasso di Butterworth di ordine 1 con frequenza di taglio a 3 dB uguale a  $1/RC$ . La fase in banda passante è solo approssimativamente lineare.

**Esempio 3.3.2.**

Si consideri il filtro realizzato dal circuito RLC in Figura 3.9. Provare che il circuito realizza un filtro di Butterworth di ordine 2.

Applicando il principio II nella rappresentazione in frequenza, vale:

$$V(\omega) = RI(\omega) + i\omega LI(\omega) + \frac{1}{i\omega C}I(\omega).$$

Il comportamento del condensatore è dato da:

$$U(\omega) = \frac{1}{i\omega C}I(\omega).$$

Dividendo membro a membro le due uguaglianze precedenti, si ottiene la seguente funzione di trasferimento  $H(\omega)$ :

$$H(\omega) = \frac{U(\omega)}{V(\omega)} = \frac{1}{1 + iRC\omega - LC\omega^2}.$$

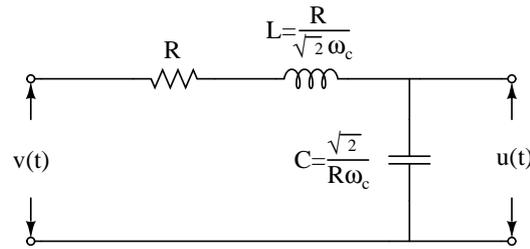


Figura 3.9 Filtro di Butterworth di ordine 2.

Poiché  $L = \frac{R}{\sqrt{2}}$  e  $C = \frac{\sqrt{2}}{R\omega_c}$ , si ottiene infine:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c} - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Risulta quindi che guadagno e fase siano:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}, \quad \angle H(\omega) = -\arctan \frac{\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}.$$

### 3.3.2 Realizzazione di Filtri di Butterworth con Circuiti ad Elementi Attivi

In questa sezione presentiamo una tecnica per la realizzazione di filtri di Butterworth analogici mediante circuiti ad elementi attivi, contenenti resistenze, condensatori e amplificatori operazionali. Il fatto che non sia richiesta alcuna induttanza è, come detto, un vantaggio importante nella pratica poiché le induttanze sono voluminose, contengono resistenze e capacità parassite e dissipano considerevole potenza. Il metodo può essere facilmente esteso alla costruzione di altri tipi di filtri.

I passi principali possono essere riassunti come segue.

1. Si consideri la funzione di trasferimento del filtro. Nel caso del filtro di Butterworth di ordine  $N$  con frequenza di taglio  $\omega_c$ , risulta

$$H(\omega) = \frac{1}{B_N\left(\frac{s}{\omega_c}\right)},$$

dove  $s = i\omega$  e  $B_N(z)$  è il polinomio di Butterworth di ordine  $N$ .

2. Si decompone  $B_N(z)$  come prodotto  $p_1(z) \cdot p_2(z) \cdots p_m(z)$ , dove  $p_i(z)$  è del tipo  $z + 1$  oppure  $z^2 + bz + 1$ , con  $b$  reale positivo. In Tabella 3.2 sono riportate le fattorizzazioni dei primi otto polinomi di Butterworth.
3. Si realizzano separatamente i sistemi  $S_i$  che hanno  $1/p_i(s/\omega_c)$  come funzione di trasferimento ( $1 \leq i \leq m$ ).
4. Si costruisce il sistema  $S$  ottenuto ponendo in cascata i sistemi  $S_i$ , in modo che l'uscita di  $S_i$  sia l'ingresso di  $S_{i+1}$  ( $1 \leq i < m$ ), come rappresentato Figura 3.10.

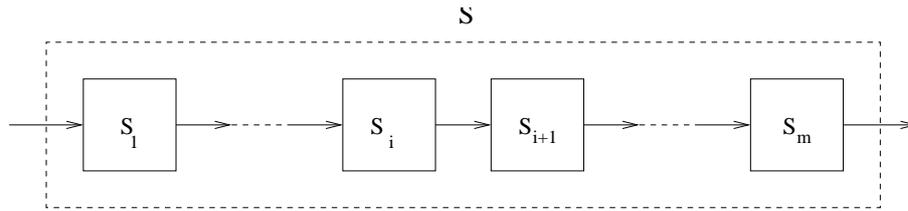


Figura 3.10 Cascata dei sistemi  $S_i$ , con  $1 \leq i \leq m$ .

La costruzione è corretta poiché il sistema complessivo  $S$  ha come funzione di trasferimento  $H\left(\frac{s}{\omega_c}\right)$  il prodotto delle funzioni di trasferimento dei sistemi  $S_i$ , cioè:

$$H\left(\frac{s}{\omega_c}\right) = \frac{1}{p_1\left(\frac{s}{\omega_c}\right)} \cdots \frac{1}{p_m\left(\frac{s}{\omega_c}\right)} = \frac{1}{p_1\left(\frac{s}{\omega_c}\right) \cdots p_m\left(\frac{s}{\omega_c}\right)} = \frac{1}{B_N\left(\frac{s}{\omega_c}\right)}.$$

Il passo 4. mostra come un arbitrario filtro di Butterworth possa essere ottenuto da una composizione in cascata di sistemi che hanno funzioni di trasferimento del tipo:

$$H_1\left(\frac{s}{\omega_c}\right) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_c} + 1} \quad \text{oppure} \quad H_2\left(\frac{s}{\omega_c}\right) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + b\frac{s}{\omega_c} + 1}.$$

Illustriamo ora come costruire un circuito a componenti attive che realizza il filtro con funzione di trasferimento

$$H_2\left(\frac{s}{\omega_c}\right) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + b\frac{s}{\omega_c} + 1}. \quad (3.1)$$

A questo scopo si consideri il circuito (a) in Figura 3.11. Esso è composto da elementi

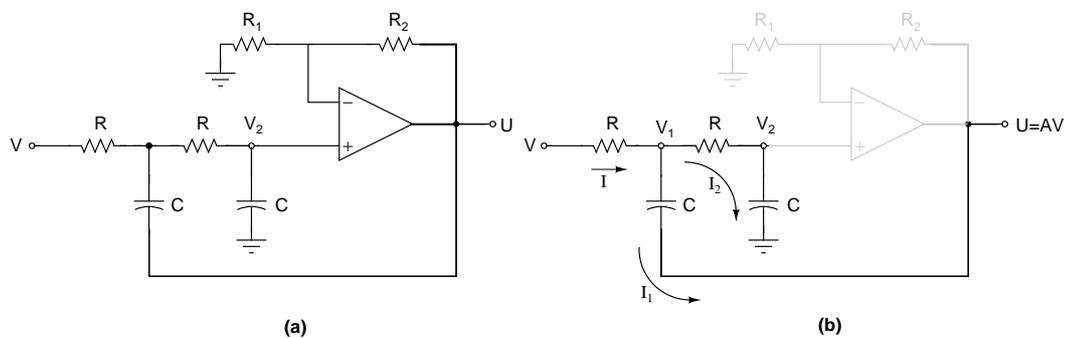


Figura 3.11 (a) Filtro di Butterworth di ordine 2. (b) Sottocircuito.

passivi (condensatori e resistenze) e da un amplificatore operazionale non-invertente che permette di amplificare il segnale  $V_2$  di un fattore  $A$ , controllato dalle resistenze  $R_1$  e  $R_2$ :

$$U = AV_2 \quad \text{con} \quad A = \frac{R_1 + R_2}{R_1} > 1.$$

Analizziamo ora il sottocircuito (b) in Figura 3.11; con  $V$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $U$  denotiamo le trasformate di Fourier delle tensioni nei punti indicati e con  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  le trasformate di Fourier delle correnti nei cammini indicati. Poiché  $I = I_1 + I_2$  risulta:

$$V = R(I_1 + I_2) + V_1. \quad (3.2)$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} V_1 &= RI_2 + V_2, & V_1 &= \frac{1}{sC}I_1 + U, \\ V_2 &= \frac{1}{A}U, & V_2 &= \frac{1}{sC}I_2. \end{aligned}$$

Queste ultime quattro equazioni permettono di esprimere  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  in termini di  $U$ ; sostituendo nella (3.2) si ottiene infine:

$$V = [(RCs)^2 + (3 - A)RCs + 1]U.$$

Il circuito realizza dunque un filtro con funzione di trasferimento:

$$\frac{1}{(RCs)^2 + (3 - A)RCs + 1}.$$

Per ottenere il filtro con la funzione di trasferimento desiderata (3.1) basta scegliere  $R$ ,  $C$  ed  $A$  tali che:

$$RC = \frac{1}{\omega_c}, \quad (3.3)$$

$$A = 3 - b. \quad (3.4)$$

Il metodo sopra esposto è del tutto generale. In particolare:

- Esso può essere applicato per la realizzazione di altri filtri, ad esempio quelli di Chebyshev, semplicemente considerando le fattorizzazioni dei polinomi di Chebyshev in fattori di primo e secondo grado a coefficienti reali.
- Esso può essere facilmente adattato alla costruzione di filtri passaalto, osservando che la funzione di trasferimento di un filtro passaalto con frequenza di taglio  $\omega_c$  pu essere ottenuta dalla funzione di trasferimento del filtro passabasso con la stessa frequenza di taglio, operando la sostituzione  $\frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow \frac{\omega_c}{\omega}$ . In particolare, un circuito passaalto con funzione di trasferimento  $H_2$  può essere ottenuto scambiando le resistenze  $R$  con i condensatori  $C$  nel circuito in Figura 3.11.
- Per quanto riguarda infine la realizzazione di filtri passabanda, un filtro passabanda con frequenza di taglio  $\omega_1 < \omega_2$  può essere ottenuto ponendo in cascata un filtro passabasso con frequenza di taglio  $\omega_2$  e un filtro passaalto con frequenza di taglio  $\omega_1$ .

### Esempio 3.3.3.

Realizzazione di un filtro di Butterworth passabasso di ordine 4 con frequenza di taglio  $f_0 = 1$  kHz.

Ricordiamo (vedi Tabella 3.2) che il polinomio di Butterworth di ordine 4 è:

$$B_4(s) = (s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1).$$

Il filtro sarà ottenuto ponendo in cascata i due circuiti aventi funzioni di trasferimento:

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 0.765\frac{s}{\omega_c} + 1}, \quad \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 1.848\frac{s}{\omega_c} + 1}, \quad \text{con } \omega_c = 2\pi f_0.$$

Tali circuiti sono del tipo mostrato in Figura 3.11. Per la (3.4), gli amplificatori operazionali dei due circuiti devono avere guadagni  $A' = 3 - 0.765 = 2.235$ ,  $A'' = 3 - 1.848 = 1.152$ .

Poiché  $A' = \frac{R'_1 + R'_2}{R'_1}$  e  $A'' = \frac{R''_1 + R''_2}{R''_1}$ , fissati arbitrariamente  $R'_1 = R''_1 = 10 \text{ k}\Omega$ , si ricava  $R'_2 = 12.35 \text{ k}\Omega$  e  $R''_2 = 1.52 \text{ k}\Omega$ . Per la (3.3), i valori di  $R$  e  $C$  nei due circuiti devono verificare  $RC = \frac{1}{2\pi 10^3}$  sec. Fissato arbitrariamente  $C = 0.1 \mu\text{F}$ , si ottiene  $R = 1.6 \text{ k}\Omega$ .

Il circuito finale, ottenuto ponendo in cascata i due circuiti precedenti, è mostrato in Figura 3.12.

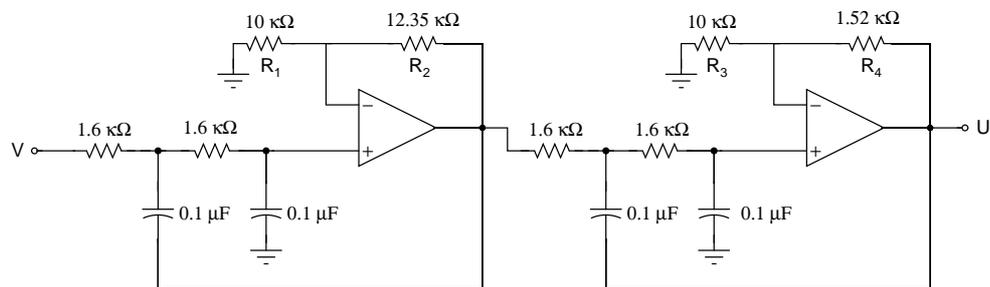


Figura 3.12 Filtro di Butterworth passabasso di ordine 4.



## CONVERSIONE ANALOGICO-DIGITALE

I segnali del mondo reale sono analogici, mentre un elaboratore digitale è in grado di memorizzare e trattare esclusivamente sequenze finite di bit. Per trattare con tecniche digitali i segnali analogici è allora necessario, in via preliminare, approssimare quest'ultimi con segnali digitali. I sistemi che trasformano un segnale analogico nel corrispondente digitale sono detti *convertitori analogico-digitali* (ADC), mentre quelli che realizzano l'operazione inversa, ossia trasformare un segnale digitale in un segnale analogico, sono detti *convertitori digitali-analogici* (DAC).

I principi di base che sovrintendono detto processo di conversione sono quelli espressi dalle operazioni di *campionamento* e di *quantizzazione*.

Al campionamento è dedicato il primo paragrafo. Un sistema che realizza l'operazione di campionamento viene chiamato *campionatore*. Campionare un segnale a tempo continuo significa rilevare le ampiezze del segnale su un insieme discreto di tempi: i "frames" catturati da una telecamera che inquadra una scena reale, ne costituiscono un esempio. Viene qui discusso il fondamentale teorema del campionamento: un segnale a banda limitata da  $W$  Hz può essere perfettamente ricostruito dai suoi campioni presi con una frequenza di almeno  $2W$  Hz; viene inoltre sommariamente descritto il fenomeno dell'*equivocazione* (*aliasing*), che si verifica quando la frequenza di campionamento è inferiore a  $2W$ .

La quantizzazione permette di trasformare un segnale a valori continui in un segnale a valori su un insieme finito. Questa operazione in generale introduce un errore irreversibile nel segnale quantizzato: dato il segnale quantizzato, non è in generale possibile ricostruire il segnale originale. È tuttavia possibile controllare come il segnale quantizza-

to risulti una buona approssimazione di quello analogico: un tipico indice di qualità è il *rapporto segnale-rumore* SQNR. I sistemi che realizzano l'operazione di quantizzazione sono chiamati *quantizzatori*: nel secondo paragrafo viene introdotto e studiato il quantizzatore uniforme a  $n$  bit, mostrando in particolare che ogni bit aggiunto al quantizzatore comporta un miglioramento di 6 dB nel rapporto segnale-rumore. Successivamente si motivano e si introducono modelli di quantizzatori non uniformi.

Un segnale di durata limitata nel tempo, campionato e quantizzato, può essere trattato con tecniche digitali: nel terzo paragrafo vengono studiati i principali sistemi di conversione analogico-digitale (ADC) e digitale-analogico (DAC), che costituiscono il "ponte" tra il mondo analogico e l'elaboratore digitale. Viene in particolare discussa la tecnica di sovracampionamento, che permette di migliorare il rapporto segnale-rumore ed una sua importante applicazione: il convertitore a 1 bit basato sulla sigma-delta modulazione. Viene infine analizzato il comportamento di un convertitore digitale-analogico di ordine 0 (ZOH).

Il capitolo termina con una discussione sulle codifiche del livello di quantizzazione, che consente di trasformare il segnale in una sequenza binaria. Vengono infine presentate alcune codifiche, utili ai fini della trasmissione, di sequenze binarie in termini di segnali a tempo continuo composti da rettangoli.

## 4.1 Campionamento

Campionare un segnale a tempo continuo significa rilevare le ampiezze del segnale su un insieme discreto di tempi. Ad esempio, fissato un intervallo di tempo di ampiezza  $\tau$ , un campionamento uniforme con periodo  $\tau$  di un segnale  $f(t)$  corrisponde all'osservazione del segnale ai tempi  $n\tau$  ( $-\infty < n < \infty$ ); il segnale campionato può essere interpretato come il segnale a tempo discreto  $f(n\tau)$ .

Il sistema *campionatore uniforme* con frequenza di campionamento  $\nu_s = 1/\tau$ , trasforma quindi un segnale a tempo continuo  $f(t)$  nel segnale a tempo discreto  $f(n\tau)$ , come mostrato in Figura 4.1. Si osservi che il sistema campionatore è un sistema lineare.

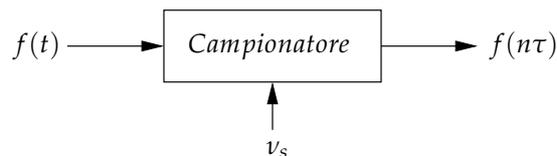


Figura 4.1 Sistema campionatore uniforme con periodo di campionamento  $\tau = 1/\nu_s$ .

### Campionamento Ideale

Il *campionamento ideale* è assimilabile ad un processo di modulazione in cui il segnale portante è definito dal treno di impulsi di Dirac

$$\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau).$$

Il segnale modulato, denotato con  $f_s(t)$ , risulta essere pertanto

$$f_s(t) = f(t)\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau)\delta(t - n\tau). \quad (4.1)$$

La Figura 4.2 illustra il processo di campionamento ideale della funzione  $f(t)$  modulato dal treno di impulsi.

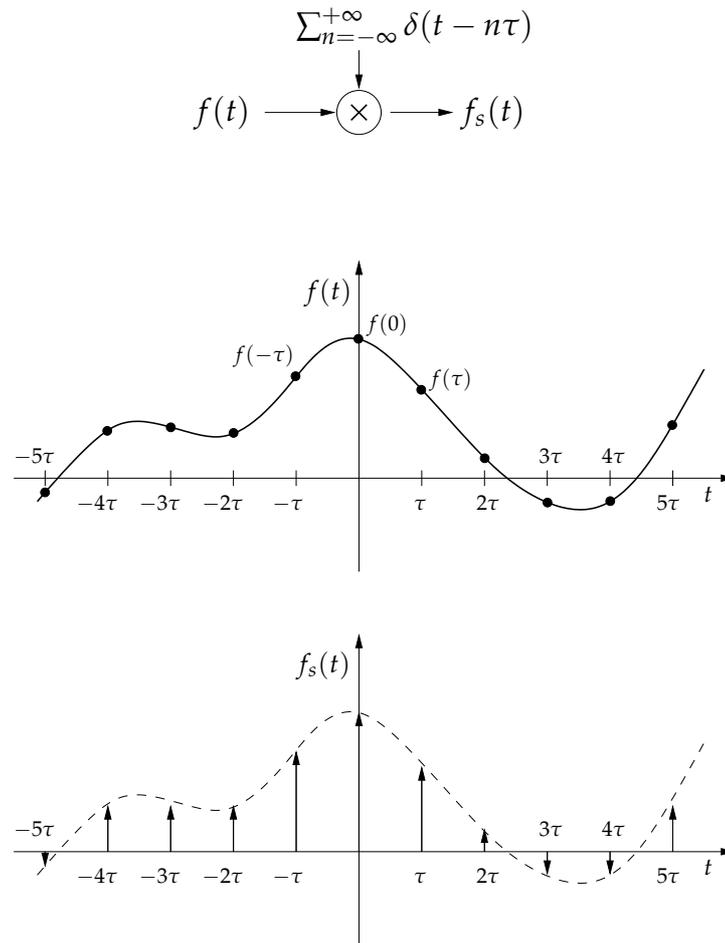


Figura 4.2 Campionamento ideale.

È utile osservare che il segnale  $f_s(t)$  non risulta essere un modello per segnali reali così come il campionamento ideale non è un sistema fisicamente realizzabile; corrisponde invece ad un'operazione realizzata da sistemi campionatori reali la generazione della sequenza  $f(n\tau)$  che qui rappresenta il peso delle funzioni impulsive implicate nel campionamento idealizzato. La trattazione qui esposta si basa su considerazioni ideali solo per convenienza matematica ed esigenze di chiarezza espositiva, specie se si pensa all'analisi spettrale che risulta notevolmente semplificata.

Il passaggio successivo è l'analisi nel dominio delle frequenze del sistema finora introdotto. Innanzitutto deriviamo lo spettro del treno d'impulsi impiegato nel rilevare i campioni della funzione  $f(t)$ . Ricordando che la trasformata di Fourier della funzione impulsiva è la costante unitaria e che la trasformata di una funzione periodica è un treno di impulsi con ampiezza data dai coefficienti della serie di Fourier associata, moltiplicati per  $2\pi$  (vedi Esempio 2.5.7), si ha che:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s),$$

dove  $\omega_s = 2\pi\nu_s = \frac{2\pi}{\tau}$  è la frequenza di campionamento in rad/sec.

### Teorema del Campionamento di Shannon

Il problema che si intende affrontare qui è il seguente: dato un segnale  $f(t)$ , stabilire con quale frequenza deve essere campionato affinché il segnale campionato  $f(n\tau)$  ( $-\infty < n < \infty$ ) contenga la stessa informazione di  $f(t)$ , cioè sia possibile ricostruire  $f(t)$  a partire dalla sequenza  $f(n\tau)$ ?

Per dare una risposta a questa domanda occorre passare al dominio delle frequenze e dunque alla trasformata di Fourier della (4.1).

Se denotiamo con  $F_s(\omega)$  la trasformata della funzione  $f_s(t)$ , allora per la proprietà di dualità prodotto nel tempo/convoluzione in frequenza vale:

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s).$$

Poiché

$$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s),$$

dalla proprietà di convoluzione si ricava

$$F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) = F(\omega - n\omega_s).$$

Si conclude che la trasformata di Fourier del segnale modulato dalla funzione impulsiva è

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s).$$

Dunque lo spettro del segnale campionato idealmente è costituito da repliche dello spettro di  $f(t)$  traslate in frequenza di  $2n\pi/\tau$  Hz e scalate in ampiezza secondo il fattore  $1/\tau$ .

Una relazione importante sussiste tra la frequenza di campionamento  $\omega_s$  e la massima frequenza  $\omega_B = 2\pi\nu_B$  presente nello spettro del segnale campionato  $f(t)$ . La Figura 4.3 fornisce un'interpretazione grafica di detta relazione: se il segnale  $f(t)$  è a banda limitata, allora le repliche dello spettro di  $f(t)$  non si sovrappongono in  $F_s(\omega)$  essendo soddisfatta con un certo margine la *relazione di Nyquist*

$$\omega_s \geq 2\omega_B \text{ o equivalent. } \nu_s \geq 2\nu_B, \quad \text{ovvero } \tau \leq \frac{1}{2\nu_B}.$$

Dalla stessa figura si comprende che quanto asserito è vero per un periodo di campionamento con limite inferiore  $\tau_B = \frac{1}{2\nu_B}$ , mentre per valori inferiori (dove la condizione di Nyquist non è verificata) si hanno inevitabilmente sovrapposizioni delle repliche spettrali.

Quanto detto sopra è asserito nel seguente

**Teorema 4.1 (Teorema del campionamento).** *Un segnale  $f(t)$  a banda limitata da  $\nu_B$  Hz, la cui trasformata di Fourier  $F(\omega)$  è quindi nulla per  $|\omega| > 2\pi\nu_B$  rad/sec, può essere univocamente ricostruito dai suoi campioni  $f(n\tau)$  ( $-\infty < n < \infty$ ) presi a frequenza  $\nu_s = \frac{1}{\tau}$ , se  $\nu_s \geq 2\nu_B$ . La frequenza  $2\nu_B$  Hz è detta tasso o frequenza di Nyquist.*

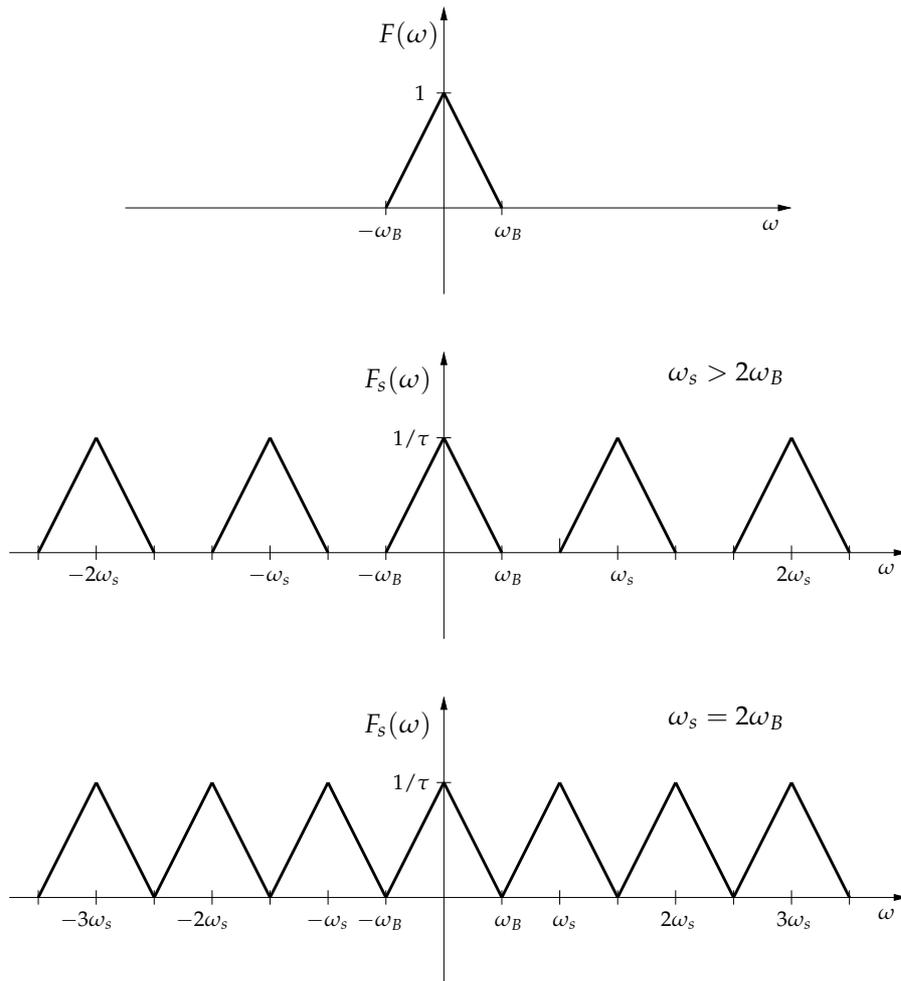


Figura 4.3 Analisi del campionamento nel dominio delle frequenze.

#### Esempio 4.1.1.

Un segnale contiene componenti in frequenza inferiori a 4 kHz; determinare la minima frequenza di campionamento che ne permetta la ricostruzione priva di errore.

Basta calcolare il tasso di Nyquist  $2 \times 4 = 8$  kHz.

Sotto l'ipotesi del teorema di Shannon (segnale a banda limitata da  $\omega_B$  e frequenza di campionamento  $\omega_s \geq 2\omega_B$ ), il segnale  $f(t)$  può essere ricostruito dalla sua versione campionata  $f_s(t)$  mediante l'applicazione di un filtro passabasso ideale avente guadagno  $\tau$  e frequenza di taglio  $\omega_c$  tale che:

$$\omega_B \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_B.$$

La Figura 4.4 illustra l'intero processo che dal campionamento ideale operato da modulazione impulsiva porta alla ricostruzione del segnale originale mediante l'applicazione di un filtro ideale con caratteristiche sopra descritte.

Al fine di mostrare la famiglia di funzioni che, a partire dai campioni del segnale, consentono di ottenere una perfetta ricostruzione dello stesso, ricaviamo la risposta impulsiva

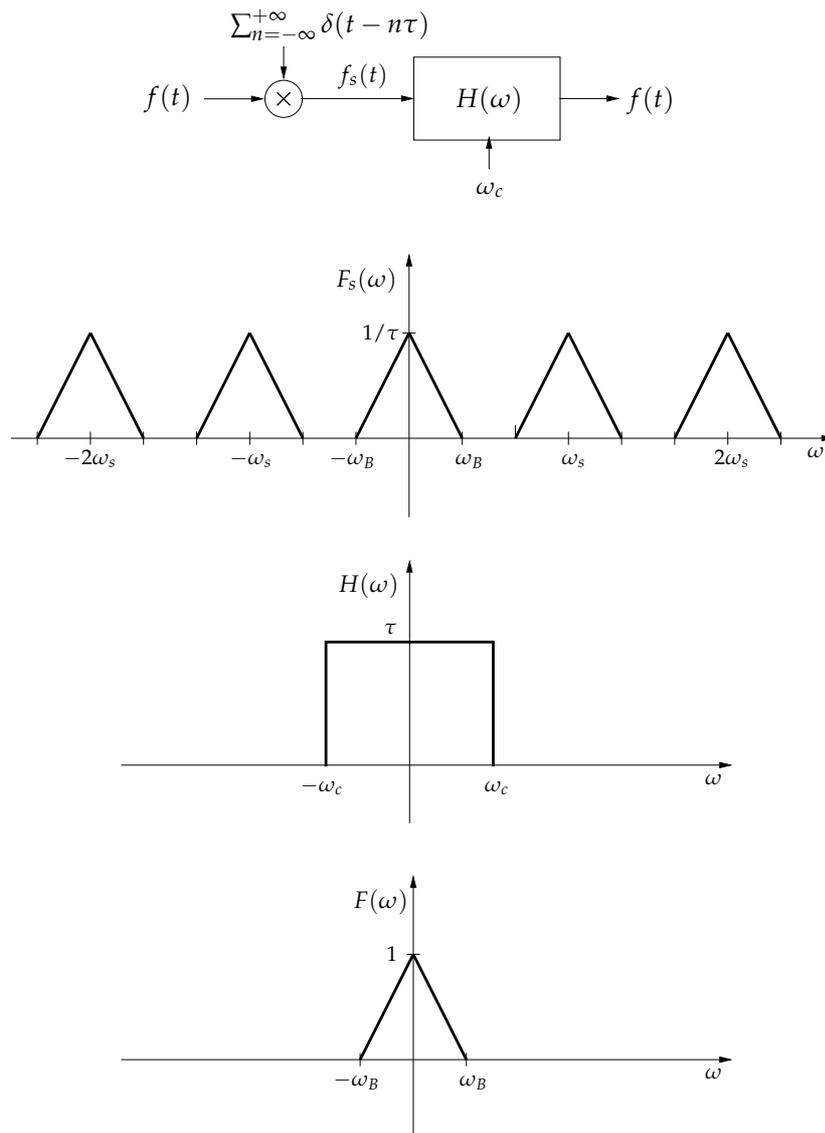


Figura 4.4 Ricostruzione del segnale dai suoi campioni e filtro ideale.

$h(t)$  del filtro implicato nel processo di ricostruzione, avente come spettro  $H(\omega)$ , frequenza di taglio  $\omega_s/2$  e guadagno  $\tau$  (vedi Figura 4.3). Dal capitolo precedente (Esempio 2.5.8) sappiamo che

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tau \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right).$$

Dalla relazione precedente e per la proprietà di dualità prodotto/convoluzione si ricava

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \mathcal{F}^{-1} \{H(\omega)F_s(\omega)\} = h(t) * f_s(t) \\
 &= \text{sinc} \left( \frac{\omega_s t}{2} \right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) \delta(t - n\tau) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc} \left( \frac{\omega_s t}{2} \right) * f(n\tau) \delta(t - n\tau) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) \text{sinc} \left( \frac{\omega_s (t - n\tau)}{2} \right).
 \end{aligned}$$

La formula trovata è riferita all'interpolazione ideale. Come discusso in precedenza, l'aggettivo ideale tiene conto del fatto che il filtro passabasso è ideale e di conseguenza la sua risposta all'impulso è non causale e di durata infinita; fatto questo d'altro canto ben evidente dalle funzioni interpolatrici  $\text{sinc}(\cdot)$ , la cui sovrapposizione ricostruisce il segnale desiderato, che sono infinitamente estese nel tempo in ambedue le direzioni: in altre parole il filtraggio di ricostruzione ideale non è fisicamente realizzabile.

### Aliasing

Rimane infine da chiarire che cosa accade quando non sono soddisfatte le condizione del teorema di Shannon, cioè quando la banda del segnale è illimita oppure il segnale è a banda limitata ma la frequenza di campionamento è inferiore al tasso di Nyquist:  $\nu_s < 2\nu_B$  o equivalentemente  $\omega_s < 2\omega_B$ . Risulta evidente che il metodo di ricostruzione sopra descritto perde la sua efficacia a causa delle sovrapposizioni che si creano nella ripetizione periodica del segnale trasformato, come mostrato in Figura 4.5. La sovrapposizione di alcune componenti in frequenza crea distorsioni irreversibili perché introduce nuove componenti non presenti nello spettro originale, rendendo impossibile il compito di ricostruzione del segnale dato ad opera del filtro passabasso ideale.

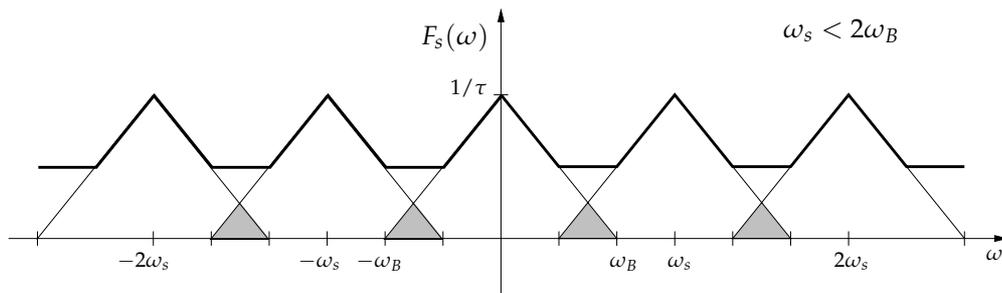


Figura 4.5 Tipica manifestazione del fenomeno dell'aliasing.

A causa di questo effetto, chiamato *equivocazione* o *aliasing*, non è in generale possibile ricostruire il segnale di partenza sulla base del segnale campionato. Per evitare questo fenomeno, un sistema campionatore a frequenza  $\omega_s$  viene normalmente fatto precedere da un filtro passabasso con frequenza di taglio  $\omega_c$  al più  $\omega_s/2$ , detto filtro anti-aliasing, come mostrato in Figura 4.6.

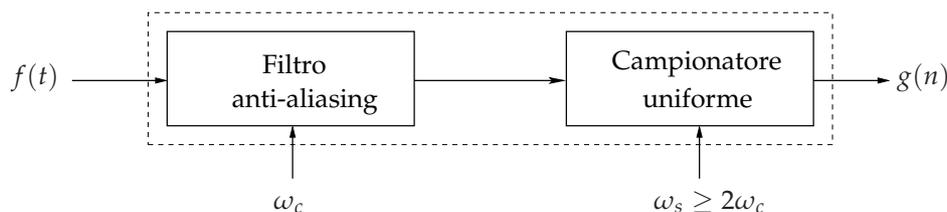


Figura 4.6 Sistema campionatore preceduto da filtro anti-aliasing.

#### Esempio 4.1.2.

In telefonia le più alte frequenze di interesse sono 3.4 kHz. Una conversazione può tuttavia contenere frequenze superiori ai 10 kHz. Indicare come è possibile ricostruire il segnale di interesse (cioè le componenti in frequenza inferiori a 3.4 kHz) da un suo campionamento a 8 kHz.

Una semplice soluzione consiste nel premettere a campionatore un filtro passabasso con frequenza di taglio a 3 kHz.

### Caratteristiche dei Filtri Anti-Aliasing Reali

Un filtro anti-aliasing dovrebbe rimuovere tutte le componenti del segnale a frequenze superiori o uguali alla metà della frequenza di campionamento: in linea di principio questo può essere ottenuto da un filtro ideale passabasso con frequenza di taglio pari alla metà della frequenza di campionamento. Come osservato nel Capitolo 3, tali filtri non sono tuttavia realizzabili e possono solo essere approssimati con filtri “adeguati” alla particolare applicazione: in questa sezione discutiamo l’adeguatezza di un filtro anti-aliasing rispetto alle caratteristiche di un convertitore.

Anticipando la discussione dei paragrafi seguenti, supponiamo che il convertitore sia composto da un campionatore a frequenza  $\nu_s$  e da un quantizzatore che approssima i valori del segnale utilizzando  $m$  bit (si veda la prossima sezione); consideriamo inoltre filtri passabasso caratterizzati dalla loro frequenza di taglio  $\nu_c$  a 3 dB e frequenza di stop  $\nu_T$ . Il nostro problema richiede di scegliere  $\nu_s$ ,  $\nu_c$  e  $\nu_T$  in modo tale da garantire la corretta conversione di segnali con limite di banda  $\nu_B$ .

Una possibile soluzione è data da:

1. la frequenza di taglio  $\nu_c$  a 3 dB può essere scelta pari a  $\nu_B$ .
2. la frequenza di stop può essere scelta in modo tale che la massima oscillazione in banda proibita sia confrontabile con l’errore introdotto dalla quantizzazione o, equivalentemente, richiedendo che l’attenuazione  $-g(\nu_T)$  sia uguale al rapporto segnale rumore SQNR, che per un quantizzatore a  $m$  bit vale  $6m + 1.7$ :

$$-20 \log_{10} |H(\nu_T)| = 6m + 1.7 .$$

**Esempio 4.1.3.**

Si utilizzi un filtro di Butterworth di ordine 6 come filtro anti-aliasing per un convertitore con quantizzatore a 8 bit; si supponga che i segnali di interesse abbiano limite di banda di  $f_{\max} = 300$  Hz. Determinare la frequenza di taglio a 3dB, la dimensione della banda di transizione del filtro e la frequenza di lavoro del convertitore.

Come visto in Sezione 3.2.1, il guadagno di un filtro di Butterworth di ordine 6 con frequenza di taglio a 3dB  $\nu_c$  è  $\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\nu}{\nu_c})^{12}}}$ . Osserviamo per prima cosa che la frequenza di taglio  $\nu_c$  può essere posta a 300 Hz. La frequenza di stop può ora essere determinata eguagliando l'attenuazione al rapporto segnale rumore:

$$10 \log_{10} \left( 1 + \left( \frac{\nu_T}{300} \right)^{12} \right) = 6 \times 8 + 1.7 .$$

Si ottiene una frequenza di stop  $\nu_T \approx 783$  Hz; la dimensione della banda di transizione risulta allora 483 Hz. La frequenza di stop del filtro anti-aliasing è 783 Hz, e risulta maggiore del tasso di Nyquist pari a 600 Hz. Per garantire un corretto funzionamento del convertitore in presenza di segnali arbitrari occorre allora campionare ad almeno 783 Hz, superiore al tasso di Nyquist.

## 4.2 Quantizzazione

La *quantizzazione* è il processo che permette di trasformare un segnale a valori continui in un segnale che assume un numero finito di valori. Un modo semplice di quantizzare consiste nel prefissare un insieme finito di  $l$  valori numerici  $\{x_1, \dots, x_l\}$  e di associare ad ogni numero  $x$  il valore numerico  $x_k$  che è più vicino a  $x$ . Il passo ulteriore è quello della *codifica* dei valori dell'insieme  $\{x_1, \dots, x_l\}$  in parole binarie opportunamente codificate

Se i segnali che prendiamo in considerazione hanno ampiezze comprese  $-\frac{V}{2}$  tra e  $\frac{V}{2}$ , questo può essere ottenuto dividendo l'insieme  $[-\frac{V}{2}, \frac{V}{2}]$  in  $l$  intervalli, detti *livelli*, ed attribuendo ad un punto  $x \in [-\frac{V}{2}, \frac{V}{2}]$  il centro del livello in cui  $x$  cade. Detti  $\{x_1, \dots, x_l\}$  i centri dei vari livelli, l'operazione di quantizzazione può essere allora descritta dalla funzione  $Q$  che ad ogni  $x$  associa il centro più vicino:

$$Q(x) = \arg \min_{x_i \in \{x_1, \dots, x_l\}} |x - x_i|.$$

Il sistema che realizza l'operazione di quantizzazione è detto *quantizzatore*. Poiché  $\{x_1, \dots, x_l\}$  non è uno spazio vettoriale, il quantizzatore non è in generale un sistema lineare. Poiché inoltre la quantizzazione  $Q$  è una funzione multi-uno, essa introduce un errore irreversibile nel segnale quantizzato: dato il segnale quantizzato, non è possibile ricostruire in modo esatto il segnale d'origine.

Nel prossimo paragrafo accenniamo ad un'analisi quantitativa di tale tipo di errore.

### 4.2.1 Quantizzatore Uniforme e Rumore di Quantizzazione

Un sistema quantizzatore in cui l'intervallo  $[-V/2, V/2]$  è suddiviso in  $l$  livelli di uguale ampiezza  $V/l$  è detto *quantizzatore uniforme*; il numero di

$$\Delta = \frac{V}{l} = x_i - x_{i+1}, \quad \text{con } 1 \leq i \leq l-1,$$

è chiamato *passo di quantizzazione*.

Se  $l = 2^m$ , gli elementi  $\{x_1, \dots, x_l\}$  possono essere codificati con parole di  $m$  bit:

$$x_i = b_{i1} \cdots b_{im}, \quad \text{con } b_{ik} \in \{0, 1\} \quad (1 \leq i \leq l).$$

Il sistema in questo caso è detto *quantizzatore uniforme* a  $m$  bit ed è mostrato in Figura 4.7.

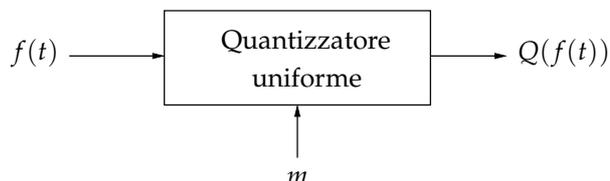


Figura 4.7 Quantizzazione uniforme a  $m$  bit.

La Figura 4.8 mostra il risultato del campionamento (pallino bianco) e campionamento più quantizzazione uniforme a quattro livelli (pallino nero) di un segnale  $f(t)$ .

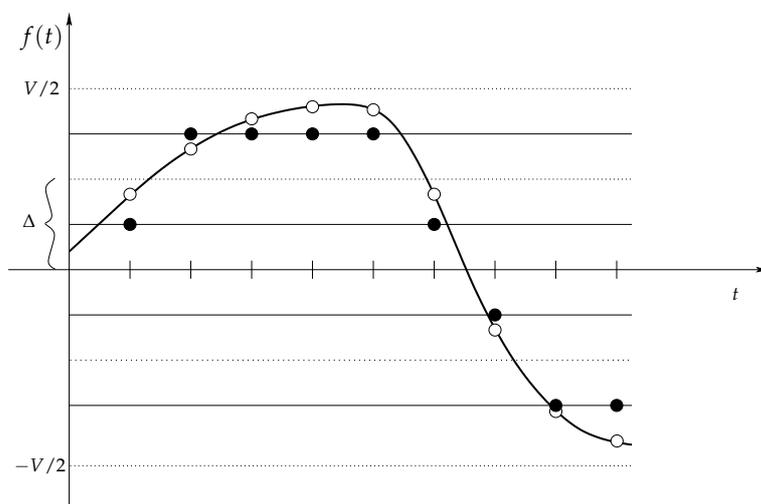


Figura 4.8 Campionamento e quantizzazione uniforme a quattro livelli di un segnale  $f(t)$ .

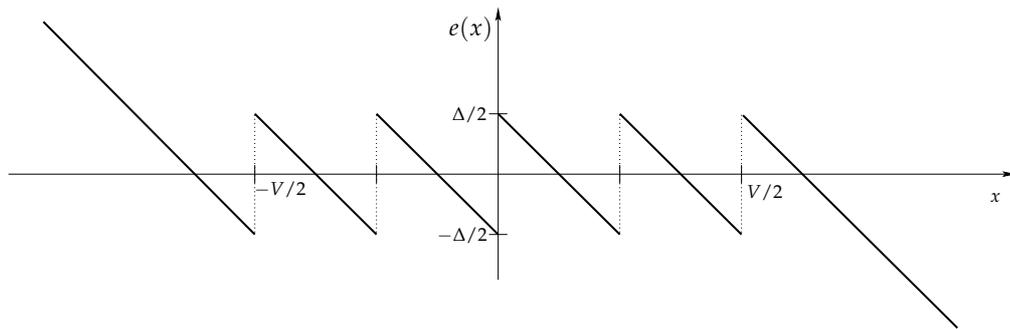
Come ben evidenziato dalla Figura, la quantizzazione  $Q$  è una funzione multi-uno che introduce un errore irreversibile nel segnale quantizzato. Una naturale misura dell'errore sul numero  $x$  è la seguente:

$$e(x) = Q(x) - x.$$

La Figura 4.9 mostra l'errore di quantizzazione per un quantizzatore uniforme di due bit (quattro livelli).

L'errore di quantizzazione ha un comportamento ben differenziato in due zone:

1. Se  $x < -V/2$  oppure  $x > V/2$ , l'errore può essere arbitrariamente grande: in questo caso l'errore è detto *errore da sovraccarico (overload)* e lo si controlla cercando di garantire che i valori del segnale  $f(t)$  in ingresso al quantizzatore rientrino nel range del quantizzatore, cioè che  $-V/2 \leq f(t) \leq V/2$ .



**Figura 4.9** Errore di quantizzazione introdotto dal quantizzatore uniforme a quattro livelli.

2. Se  $x$  è invece interno all'intervallo  $-V/2 \leq x \leq V/2$ , l'errore  $e(x)$  si mantiene in valore assoluto minore o uguale a  $\Delta/2$ ; tale errore è detto *rumore granulare*.

In seguito supporremo che l'unica sorgente di errore sia il rumore granulare.

Una misura di prestazione del quantizzatore è data dal rapporto segnale-rumore di quantizzazione SQNR (*Signal-to-Quantization-Noise Ratio*), espresso in scala logaritmica e misurato in decibel (dB):

$$\text{SQNR} = 10 \log_{10} \frac{\sigma^2}{\sigma_e^2} \text{ dB},$$

dove  $\sigma^2$  è la varianza (o potenza) del segnale e  $\sigma_e^2$  l'errore di quantizzazione quadratico medio (varianza dell'errore).

Osserviamo che nelle nostre ipotesi l'errore di quantizzazione è sempre limitato:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq \text{errore} \leq \frac{\Delta}{2}.$$

Per molti segnali deterministici inoltre l'errore è uniformemente distribuito in  $[-\Delta/2, \Delta/2]$ . Questo significa che la probabilità che l'errore sia compreso fra  $e$  ed  $e + de$  è  $de/\Delta$ . L'errore quadratico medio è allora:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 \frac{de}{\Delta} = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Ipotizziamo che il segnale di riferimento sia  $A \sin t/2$ . La media di tale segnale è 0, poiché:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T \sin t \, dt}{2T} = 0.$$

La varianza  $\sigma^2$  di tale segnale è invece  $A^2/8$ . Infatti:

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T (\frac{A}{2} \sin t - 0)^2 \, dt}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{A^2}{8} \int_{-T}^T (1 + \cos 2t) \, dt}{2T} = \frac{A^2}{8}.$$

In tal caso:

$$\text{SQNR} = 10 \log_{10} \frac{A^2/8}{\Delta^2/12} = 10 \log_{10} \frac{V^2 A^2}{\Delta^2 V^2} + 10 \log_{10} \frac{3}{2} = 20 \log_{10} l \frac{A}{V} + 1.76 \text{ dB}.$$

Per quantizzatori a  $m$  bit vale  $l = 2^m$ , quindi:

$$\text{SQNR} = 6.02m + 20 \log_{10} \frac{A}{V} + 1.76 \text{ dB}.$$

Si ottiene allora:

**Fatto 4.1.** *In un quantizzatore ogni bit aggiunto comporta un incremento di 6.02 dB al rapporto segnale rumore. Se inoltre il range dinamico  $A$  del segnale sfrutta tutto il range  $V$  del quantizzatore (cioè  $A \approx V$ ) risulta  $\text{SQNR} \approx 6.02m + 1.76 \text{ dB}$ .*

#### Esempio 4.2.1.

Determinare il numero di bit da aggiungere a un quantizzatore per migliorare il rapporto segnale-rumore da 40 dB a 68 dB.

Osservando che la differenza tra le prestazioni richieste è di 18 dB e che ogni bit aggiunto al quantizzatore migliora SQNR di 6.02 dB, concludiamo che basta aggiungere  $3 \approx \frac{18}{6.02}$  bit.

## 4.2.2 Quantizzatore Non Uniforme

Spesso per segnali reali la probabilità che un segnale abbia valore tra  $y$  e  $y + dy$  viene a dipendere da  $y$ . La Figura 4.10 mostra come in un classico segnale del parlato ampiezze elevate siano meno probabili di ampiezze piccole: È intuitivo che in questo caso una

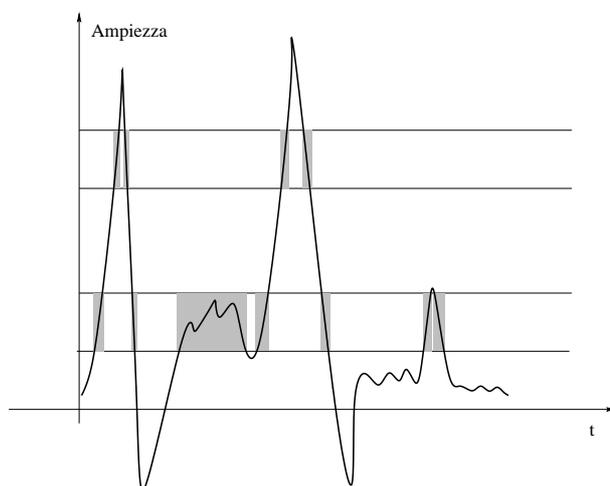


Figura 4.10 Probabilità di varie ampiezze (in grigio).

quantizzazione più fine per ampiezze piccole migliora la qualità del segnale quantizzato, diminuendo l'errore quadratico medio.

Questo risultato può essere ottenuto come segue:

1. Si applica al segnale (che per semplicità consideriamo normalizzato a valori in  $[0, 1]$ ) un funzione  $F$  invertibile che "comprime" le ampiezze vicine a 1 (vedi Figura 4.11).

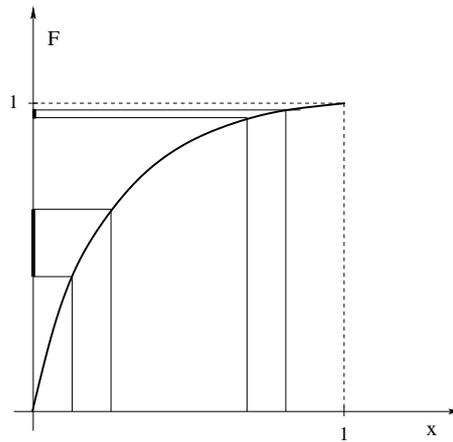


Figura 4.11 Funzione di compressione  $F$ .

2. Si applica al segnale “compresso” un quantizzatore uniforme.
3. Il segnale quantizzato viene “decompresso” applicando la funzione  $F^{-1}$  inversa di  $F$ .

Questo processo, detto *companding* (COMPRESSing and exPANDING) permette di realizzare un quantizzatore non uniforme, come schematizzato in Figura 4.12.

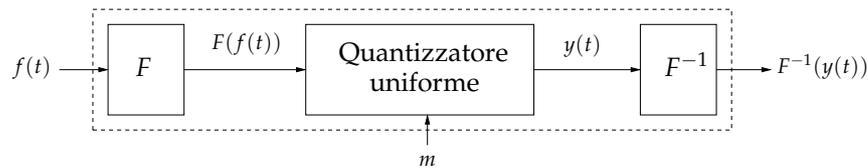


Figura 4.12 Quantizzatore non uniforme.

#### Esempio 4.2.2.

Nelle applicazioni in telefonia viene usata la famiglia di funzioni  $\mu$ -law:

$$F_{\mu}(f) = \frac{\ln(1 + \mu|f|)}{\ln(1 + \mu)} \operatorname{sgn}(f), \quad \text{con } -1 \leq f \leq 1,$$

dove  $f$  è il segnale normalizzato e  $\mu$  è un parametro opportuno (usualmente posto a 100 o più recentemente a 255). La funzione  $\mu$ -law inversa  $F_{\mu}^{-1}(y)$  è data da:

$$F_{\mu}^{-1}(y) = \frac{1}{\mu} \left( (1 + \mu)^{|y|} - 1 \right) \operatorname{sgn}(y).$$

### 4.3 Convertitore Analogico-Digitale (ADC)

Applicando un campionatore a frequenza  $\nu_s$  e consecutivamente un quantizzatore a  $m$  bit, un segnale  $f(t)$  osservato per un tempo  $T$  può essere trasformato in un vettore di  $T\nu_s$

componenti a  $m$  bit: esso può quindi essere memorizzato in forma digitale usando  $Tv_s m$  bit ed eventualmente modificato.

Il sistema che realizza questa trasformazione è detto *convertitore analogico-digitale* (ADC) e può essere descritto come in Figura 4.13.

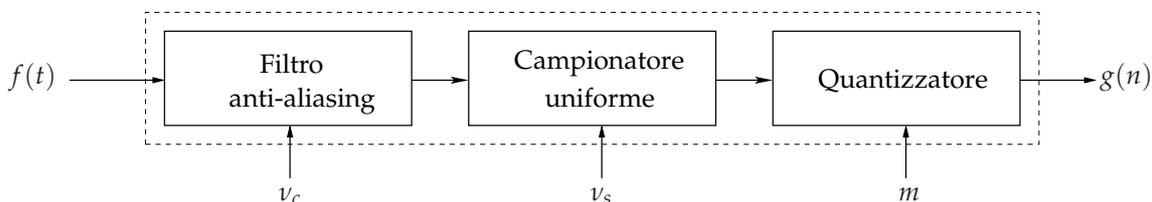


Figura 4.13 Convertitore analogico-digitale ADC.

Il filtro antialiasing in figura è un filtro passabasso ed ha la funzione di porre in ingresso al campionario un segnale a banda limitata la cui frequenza di Nyquist non superi la frequenza di campionamento.

Esistono essenzialmente due differenti tipologie di convertitori analogico-digitale.

- Nel primo tipo, rappresentato nella figura precedente, il campionario opera vicino alla frequenza di Nyquist del segnale e il quantizzatore è un quantizzatore ad  $m$  bit ( $m \gg 1$ ).
- Nel secondo tipo si usa un campionario a frequenza molto superiore alla tasso di Nyquist (sovracampionamento), un quantizzatore a 1 bit e varie operazioni digitali.

Nei convertitori analogico-digitali del primo tipo l'elemento critico è il quantizzatore. Fra i vari modelli disponibili, presentiamo qui il Flash ADC di cui riportiamo in Figura 4.14 la realizzazione del quantizzatore a 2 bit.

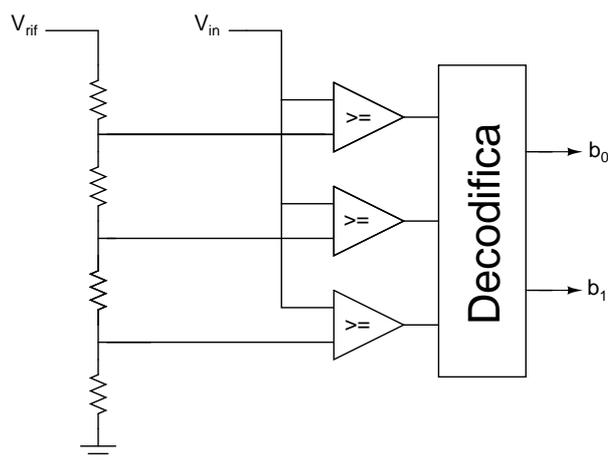


Figura 4.14 Flash ADC (2 bit).

Nel caso generale di un quantizzatore a  $m$  bit, la tensione del segnale di ingresso  $V_{im}$  viene confrontata con  $2^m - 1$  tensioni di riferimento ottenute con un sistema di  $2^m$  resistenze uguali poste in serie. Le uscite binarie dei comparatori (indicati col simbolo  $>=$  in

figura) vengono poi trasformate negli  $m$  bit di codifica da un opportuno circuito booleano (chiamato "Decodifica" in figura).

Il flash ADC è sicuramente il più veloce convertitore disponibile, ma è costituito da un numero elevato ( $2^m$ ) di resistenze che devono essere molto accurate: questo rende difficile e costosa la realizzazione per alti valori di  $m$  ( $m \gg 8$ ).

Questo fatto è una caratteristica dei convertitori analogico-digitali di questo tipo, che richiedono un'estrema accuratezza nella costruzione del sistema quantizzatore. Risulta allora conveniente un diverso tipo di convertitore, basato sull'idea di operare con frequenze di campionamento molto superiori al tasso di Nyquist utilizzando però un quantizzatore a pochi bit.

Il vantaggio ottenuto è duplice:

1. operando a frequenze molto superiori al tasso di Nyquist, il filtro antialiasing diventa meno critico di quanto non lo sia nei convertitori del primo tipo, e può essere progettato con maggior facilità;
2. l'aumento della frequenza di campionamento si può tradurre in un miglioramento del SQNR del convertitore. La prossima sezione è dedicata ad un'analisi quantitativa di questo fenomeno.

#### 4.3.1 Sovracampionamento nella Conversione Analogico-Digitale

Il teorema del campionamento garantisce la possibilità di ricostruire un segnale a banda limitata da  $\nu_B$  Hz dal suo campionamento a frequenze almeno pari al tasso di Nyquist, che è  $2\nu_B$ .

*Sovracampionare* significa operare un campionamento con frequenza  $\nu_s$  molto superiore al tasso di Nyquist; il tasso di sovracampionamento è dato dal rapporto tra frequenza di campionamento e tasso di Nyquist:

$$\text{tasso di sovracampionamento} = \frac{\nu_s}{2\nu_B}.$$

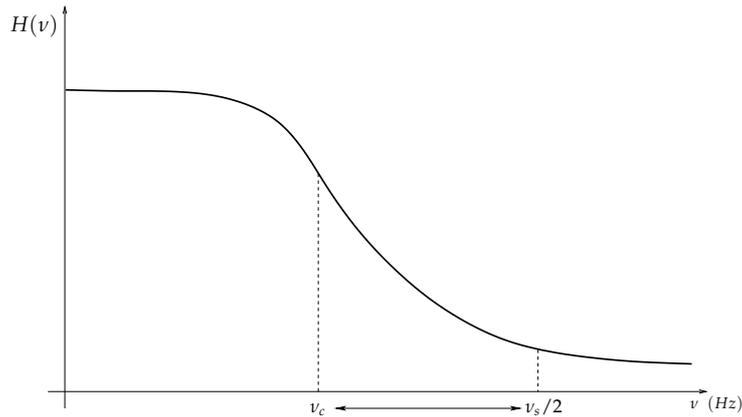
Una caratteristica degli attuali ADC è quella di utilizzare al massimo le potenzialità del sovracampionamento, ottenendone due vantaggi rilevanti:

1. possibilità di utilizzo di filtri anti-aliasing con prestazioni non elevate, poiché un filtro passabasso, lavorando a frequenze  $\frac{\nu_s}{2}$  molto maggiori della sua frequenza di taglio  $\nu_B$ , è in grado di garantire una miglior attenuazione, come mostrato in Figura 4.15.
2. miglioramento del rapporto segnale-rumore SQNR dovuto al sovracampionamento.

A questo riguardo, per gran parte dei segnali si può infatti osservare che il rumore di quantizzazione  $\sigma_e^2$ , dovuto a quantizzazione preceduto da un campionamento a frequenza  $\nu_s$ , si distribuisce uniformemente su tutte le frequenze  $\nu \in [-\nu_s/2, \nu_s/2]$ . Le componenti del segnale con frequenze tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  portano un contributo al rumore pari a  $\alpha d\nu$  per una opportuna costante  $\alpha$ . Poiché il rumore complessivo è  $\sigma_e^2$ , segue che:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\frac{\nu_s}{2}}^{\frac{\nu_s}{2}} \alpha d\nu = \alpha \nu_s,$$

questo comporta che  $\alpha = \sigma_e^2 / \nu_s$ , come evidenziato in Figura 4.16.



**Figura 4.15** Aumentare la frequenza di campionamento migliora l'attenuazione del filtro.

Il rumore che si sovrappone al segnale utile, che è a banda limitata da  $f_{\max}$ , è quello prodotto dalle componenti in frequenza comprese tra  $-f_{\max}$  e  $f_{\max}$ . Tale rumore equivale all'area segnata in grigio in Figura 4.16 e risulta essere  $2f_{\max}/F_s$ , inversamente proporzionale al tasso di sovracampionamento. Il rapporto segnale-rumore di quantizzazione, in presenza di sovracampionamento, risulta allora essere:

$$\text{SQNR} = 10 \log_{10} \frac{F_s}{2f_{\max}} \frac{\sigma^2}{\sigma_e^2}$$

Per quantizzatori uniformi a  $m$  bit, si può quindi concludere:

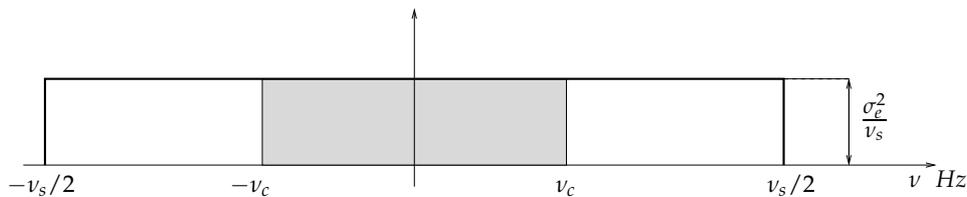
**Teorema 4.2.** Per un ADC con frequenza di campionamento e campionatore a  $m$  bit, vale:

$$\text{SQNR} = 10 \log_{10} \frac{F_s}{2f_{\max}} + 6m + 1.7$$

In particolare, raddoppiare la frequenza di campionamento porta a un miglioramento di 3 dB in SQNR.

#### Esempio 4.3.1.

E' dato un ADC per il trattamento di segnali audio 0 – 20 kHz con quantizzatore di 8 bit. Determinare la frequenza di campionamento necessaria perché il convertitore ottenga mediante sovracampionamento prestazioni equivalenti a quelle di un quantizzatore a 12 bit.



**Figura 4.16** Distribuzione del rumore alle varie frequenze.

Poiché ogni bit aggiunto al quantizzatore porta un miglioramento di SQNR di 6 dB, è richiesto un aumento totale di  $(12 - 8) \times 6 = 24 \text{ dB}$ . Ricordando che raddoppiare la frequenza di campionamento porta ad un aumento di SQNR di 3 dB, per ottenere il miglioramento di 24 dB bisogna raddoppiare la frequenza 8 volte. Il tasso di Nyquist di segnali a banda limitata da 20 KHz è 40 KHz: la frequenza richiesta risulta allora  $2^8 \times 40 \text{ KHz}$ , cioè 10.24 MHz.

### 4.3.2 Sovracampionamento: ADC con Quantizzatore di 1 Bit

Le specifiche di alta qualità degli attuali sistemi audio digitali rendono critiche le componenti analogiche degli ADC convenzionali. La disponibilità di h/w digitale di alte prestazioni permette la realizzazione di eccellenti ADC che, grazie al sovracampionamento, possono lavorare con un quantizzatore di un solo bit.

Il cuore di questo tipo di convertitore è dato dal modulatore *sigma-delta* (SDM), rappresentato nella semplice versione di SDM del primo ordine in Figura 4.17.

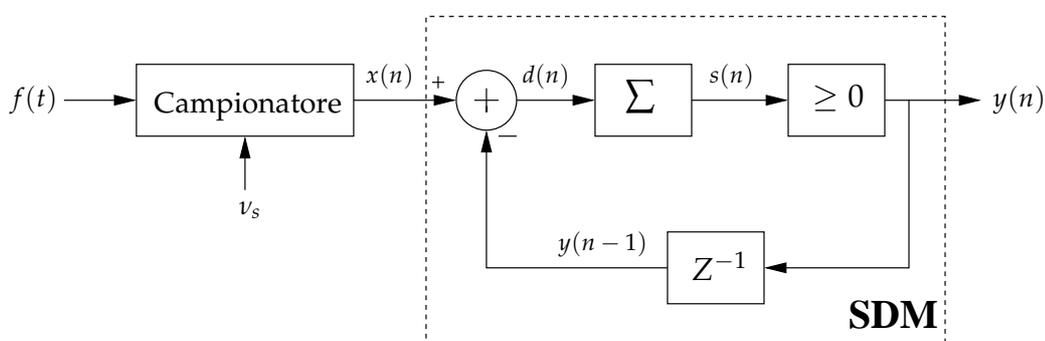


Figura 4.17 SDM del primo ordine.

Il segnale analogico  $f(t)$ , con banda limitata da  $v_B$ , viene sovracampionato a frequenza  $v_s$ , dando luogo al segnale  $x(n) = f(n\tau)$  con  $\tau = 1/v_s$ . Il modulatore sigma-delta riceve in ingresso il segnale  $x(n)$  e dà in uscita un segnale binario  $y(n)$ . Tale segnale viene ritardato e sottratto all'ingresso; la differenza  $d(n)$  viene posta in ingresso ad un integratore la cui uscita  $s(n) = \sum_{k=-\infty}^n d(k)$  viene elaborata da un quantizzatore a 1 bit con uscita:

$$y(n) = \begin{cases} +\delta & \text{se } s(n) > 0 \\ -\delta & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il modulatore sigma-delta abbate il rumore di quantizzazione per due ragioni:

1. il sovracampionamento riduce il rumore nella banda di interesse;
2. il modulatore sigma-delta, come mostreremo in Sezione 8.4.3, agisce da filtro passaalto sul rumore di quantizzazione, riducendo il rumore nella banda di interesse.

Come mostreremo in Sezione 8.4.3, vale in particolare:

**Teorema 4.3.** *Il modulatore sigma-delta del primo ordine a un tasso di sovracampionamento  $\frac{v_s}{2v_B}$  migliora il rapporto segnale-rumore di quantizzazione di  $30 \log_{10} \frac{v_s}{2v_B} - 9 \text{ dB}$ .*

Raddoppiare la frequenza di campionamento in un SDM del primo ordine provoca dunque un miglioramento del rapporto segnale rumore di 9 dB, di cui 3 dB sono dovuti al sovracampionamento e 6 dB all'azione del modulatore che abbatte il rumore alle basse frequenze e lo aumenta alle alte frequenze (noise shaping). L'applicazione successiva di un filtro passabasso elimina le componenti di rumore alle alte frequenze.

L'uscita di un SDM risulta essere un flusso di bit ad alta frequenza; per ottenere una frequenza di campionamento pari al tasso di Nyquist si applica un processo di decimazione, che ulteriormente consente di trasformare il segnale digitale a 1 bit in un segnale digitale a  $m$  bit. La effettiva lunghezza di parola  $m$  del convertitore è quella equivalente alla risoluzione ottenibile con il miglioramento in SQNR offerto dal modulatore e dalla decimazione. In Figura 4.18 sono rappresentati i principali passi di un ADC con quantizzatore a 1 bit.

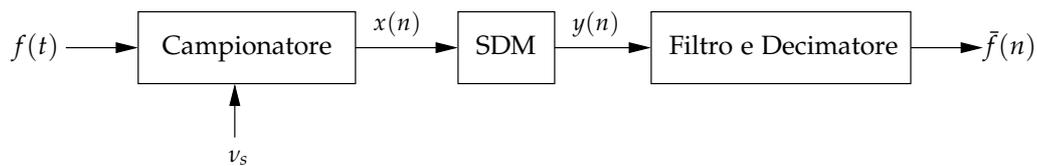


Figura 4.18 ADC con quantizzatore a 1 bit.

#### Esempio 4.3.2.

Un sistema audio per il trattamento di segnali con frequenze 0 – 20 KHz è basato su tecniche di sovracampionamento ed utilizza un SDM del primo ordine. Il segnale analogico viene trasformato prima in una corrente di bit a una frequenza di 3 MHz e poi, con un processo di decimazione, in un segnale multibit a una frequenza di 48 KHz. Determinare, in bit, la risoluzione del convertitore.

Se il tasso di Nyquist è di 48 KHz, campionando a 3 MHz si ha un tasso di sovracampionamento pari a  $\frac{3 \times 10^6}{48 \times 10^3} \approx 83$ . L'aumento in SQNR offerto da un SDM di ordine 1 è pari a  $30 \log_{10} 83 - 9 \approx 48.6$  dB. Un ADC con risoluzione di  $m$  bit, lavorando al tasso di Nyquist, ha un SQNR pari a  $6m + 1.7$ ; ipotizzando che il miglioramento in SQNR sia dovuto essenzialmente al modulatore, la risoluzione  $m$  è ottenuta risolvendo l'equazione  $6m + 1.7 = 48.6$ , ciò che comporta  $m = 7.8$  bit.

## 4.4 Convertitore Digitale-Analogico (DAC)

Il convertitore digitale-analogico (DAC) trasforma un segnale digitale, a tempo e valori discreti, in un segnale analogico. Un modo semplice per convertire un segnale digitale  $x(n)$  a frequenza  $\nu_s$  (i cui valori sono specificati da parole di  $m$  bit) è quello di trasformarlo nel segnale analogico  $g(t)$ , dove:

$$g(t) = x(n) \quad \text{per} \quad n\tau \leq t < (n+1)\tau, \quad \text{con} \quad \tau = 1/\nu_s.$$

Questo tipo di convertitore è detto di tipo ZOH (*Zero-Order-Hold*): la parola binaria al tempo  $n\tau$  è convertita nel corrispondente valore analogico, e tale valore viene mantenuto per tutto l'intervallo seguente di ampiezza  $\tau$ . Il segnale ottenuto è descritto da una funzione a scala, che può essere "lisciata" applicando un opportuno filtro passabasso, come mostrato in Figura 4.19.

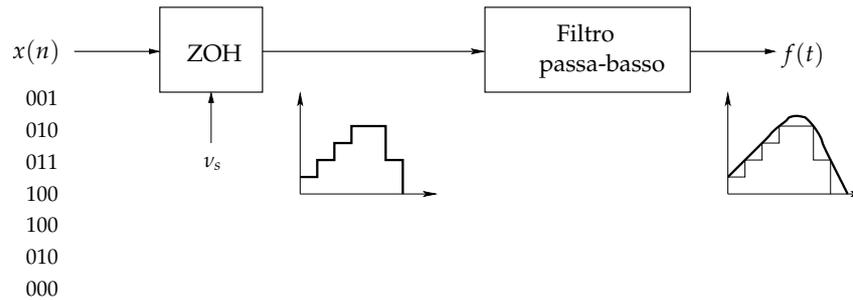


Figura 4.19 Convertitore digitale-analogico.

#### 4.4.1 Analisi in Frequenza di un Convertitore ZOH

Un segnale digitale  $x(n)$  può essere interpretato come segnale analogico  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n\tau)$ , in cui tutta l'energia del segnale è concentrata ai tempi discreti  $n\tau$ . Da questo punto di vista, il convertitore ZOH può essere visto come un sistema lineare tempo-invariante in cui la risposta all'impulso  $\delta(t)$  è il rettangolo (vedi Figura 4.20):

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \text{rect} \left( \frac{t - \tau/2}{\tau} \right).$$

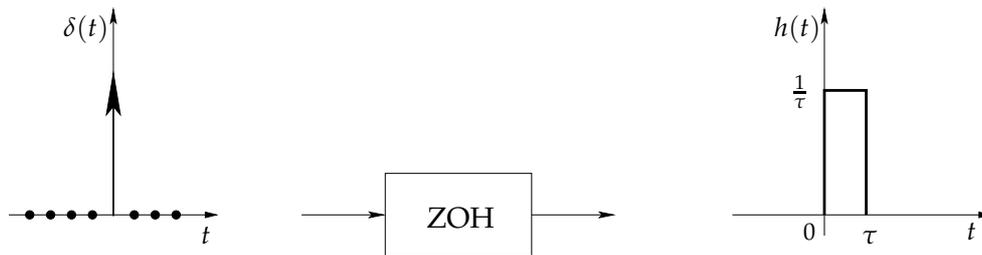


Figura 4.20 Risposta all'impulso di un DAC ZOH.

La funzione di trasferimento  $H(\omega)$  di questo sistema è dunque la trasformata di Fourier di  $h(t)$ , cioè:

$$H(\omega) = e^{-i\frac{\tau}{2}\omega} \frac{2 \sin \frac{\tau}{2}\omega}{\tau\omega}.$$

Il modulo e la fase della funzione di trasferimento del DAC di tipo ZOH a frequenza  $\nu_s = 1/\tau$  risultano allora:

$$|H(\omega)| = \left| \frac{2 \sin \frac{\tau}{2}\omega}{\tau\omega} \right|, \quad \angle H(\omega) = -\frac{\tau}{2}\omega.$$

Osserviamo che la fase è lineare, con coefficiente angolare  $-\frac{\tau}{2}$ .

Il grafico del modulo, limitato alla frequenza di Nyquist  $\pi\nu_s$  rad/sec, è mostrato in Figura 4.21.

Si osserva che il guadagno, per le componenti ad alta frequenza ( $\omega \approx \pi\nu_s$ ) è significativamente minore che per quelle a bassa frequenza ( $\omega \approx \pi$ ): questo fatto può provocare notevoli distorsioni nel segnale. Per ricostruire il segnale in modo fedele è allora utile

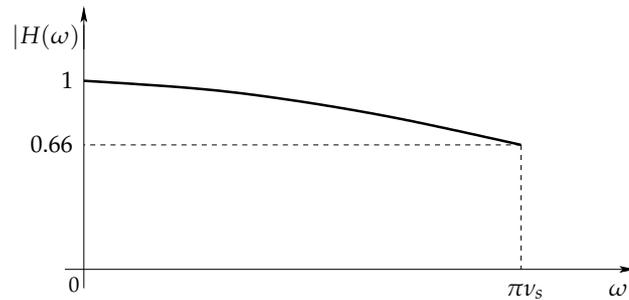


Figura 4.21 Modulo della funzione di trasferimento del DAC.

mettere in sequenza al DAC un sistema lineare tempo invariante  $EQ$  con funzione di trasferimento  $1/H(\omega)$ , in modo che il sistema complessivo (DAC + E) risulti avere guadagno  $G(\omega)$ , con:

$$G(\omega) = \left| H(\omega) \frac{1}{H(\omega)} \right|^2 = 1.$$

Il circuito che realizza  $E$  viene detto *equalizzatore* ed è caratterizzato da una funzione di trasferimento  $H_1(\omega)$  il cui modulo, mostrato in Figura 4.22, è

$$H_1(\omega) = \frac{\tau\omega}{2 \sin \frac{\tau}{2}\omega}.$$

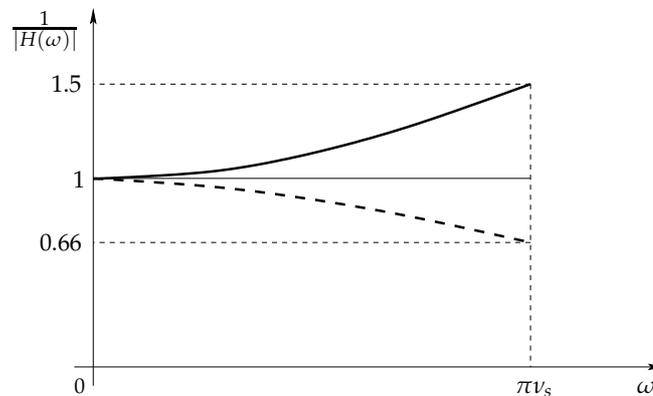


Figura 4.22 Modulo della funzione di trasferimento dell'equalizzatore.

Realizzare un equalizzatore, in questa applicazione, equivale quindi a determinare un sistema LTI il cui modulo, nella zona di lavoro, sia almeno approssimativamente  $1/|H(\omega)|$ .

Il sistema complessivo necessario ad elaborare digitalmente i segnali viene mostrato in Figura 4.23.

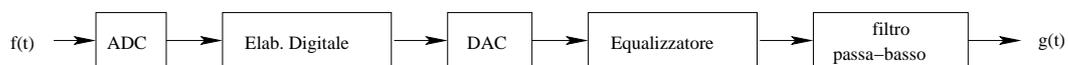


Figura 4.23 Elaborazione digitale di segnali.

Ricordiamo che se in una sequenza di sistemi LTI modifichiamo l'ordine dei sottosistemi, il risultato non cambia: in molte applicazioni risulta utile anteporre l'equalizzatore al DAC. Nelle applicazioni risultano allora possibili due approcci.

1. Il filtro equalizzatore viene posto in uscita del DAC.
2. Il filtro equalizzatore preconditiona il segnale prima che esso entri nel DAC. In tal caso l'equalizzatore sarà realizzato da un filtro digitale (si veda in Sezione 8.2.3 per una semplice soluzione).

#### Esempio 4.4.1.

Un esempio del secondo approccio si ritrova nella produzione di CD commerciali. Il processo in questo caso è caratterizzato da due fasi ben distinte: la produzione avviene in uno studio che si può permettere grandi investimenti, ammortizzati dall'alto numero di CD venduti, mentre la fruizione avviene a casa dell'acquirente del CD, mediante un sistema che deve avere un costo sopportabile.

Di conseguenza, nello studio di produzione vengono usati microfoni di alta qualità per generare segnali con basso rumore. I segnali vengono inviati ad un filtro anti-aliasing e quindi ad un ADC, venendo poi memorizzati in un master stereo in formato digitale; mediante un particolare processo, il contenuto del master viene poi riprodotto nei vari CD da commerciare. Per la fruizione del CD, esso viene inserito in un lettore: qui l'informazione digitale viene letta da un laser e i campioni sono inviati a vari DAC per le uscite stereo, opportunamente filtrate ed amplificate. L'intero processo è schematizzato nella Figura 4.24:

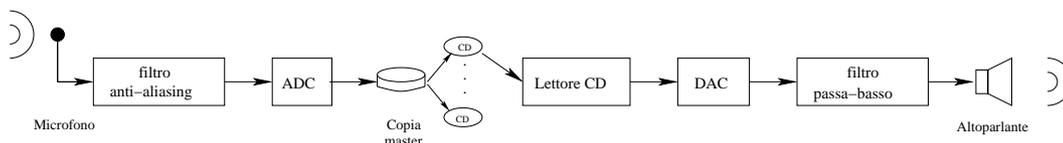


Figura 4.24 Sistema di produzione di CD commerciali.

Come abbiamo visto, il DAC attenua le frequenze più alte e quindi per migliorare la qualità del segnale è necessario aggiungere un equalizzatore. In questo caso, invece di aggiungere in ogni lettore un costoso equalizzatore, è vantaggioso preconditionare il segnale prima che venga memorizzato nel CD.

#### 4.4.2 Sovracampionamento nella Conversione Digitale-Analogica

Le motivazioni che inducono ad esplorare gli effetti del sovracampionamento nella conversione analogico-digitale sono quelle già analizzate per la conversione digitale-analogica. Ci limitiamo qui a illustrare un esempio d'impiego di questi principi nei lettori di CD.

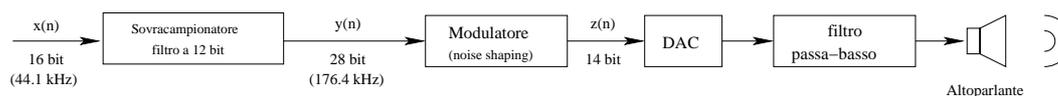


Figura 4.25 Lettore per CD commerciali.

#### Esempio 4.4.2.

Una semplificazione dei blocchi costituenti il lettore è mostrato in Figura 4.25.

Il segnale di ingresso  $x(n)$  è un segnale digitale con parole di 16 bit a frequenza di 44.1 KHz. Il segnale viene sovracampionato con tasso 4 e filtrato digitalmente con un filtro FIR con coefficienti di 12 bit, ottenendo un segnale  $y(n)$  con parole di  $16 + 12 = 28$  bit a una frequenza di  $4 \times 44.1 = 176.4$  KHz. Il segnale viene inviato a un modulatore che, come nel caso del SDM, sposta il rumore alle alte frequenze ed infine quantizzato per arrotondamento ai primi 14 bit. Il DAC seguente, con risposta in frequenza tipo  $\sin x/x$ , ha l'ulteriore effetto di abbattere il rumore alle alte frequenze del 34%.

Anche se il DAC lavora a 14 bit, l'effetto è quello di un DAC a 16 bit: i due bit guadagnati sono prodotti da un miglioramento in SQNR di 12 dB, di cui 6 dovuti al sovracampionamento e 6 al modulatore.

## 4.5 Trasmissione di Segnali Digitalizzati

Le comunicazioni a distanza sono un elemento prioritario della vita moderna. Grandi quantità di dati vengono scambiati per mezzo di reti telefoniche, radio o TV; in quest'ottica, problematiche di grande interesse sono da un lato lo studio e lo sviluppo di nuovi canali fisici di trasmissione, dall'altro le tecniche di codifica dei dati per una loro efficiente trasmissione sui canali fisici disponibili.

Un'importante parametro di efficienza è il tasso di compressione: dati compressi possono essere trasferiti a tassi di trasmissione meno elevati. In questo contesto, un vantaggio dell'elaborazione digitale è quello di poter applicare ai dati algoritmi di codifica efficienti. Un'ulteriore richiesta è la possibilità di correggere, in ricezioni, eventuali errori di trasmissione.

Analizziamo qui brevemente alcune problematiche sulla trasmissione di segnali digitalizzati. E' conveniente considerare separatamente due fasi:

1. riduzione del segnale  $f(t)$  ad una sequenza, detta flusso (stream) di bit;
2. associazione ad ogni sequenza di bit di un segnale composto da rettangoli (codifica di linea).

### 4.5.1 Modulazione a Impulso

Una prima soluzione al problema di trasformare un flusso di bit in un treno di impulsi può essere ottenuta utilizzando un ADC con quantizzatore a  $m$  bit, che trasforma un segnale  $f(t)$  in una sequenza  $x(n)$  di parole binarie di  $m$  bit. L'accostamento di tali parole realizza un flusso di bit, che può essere codificato dal segnale a componenti rettangolari come in Figura 4.26.

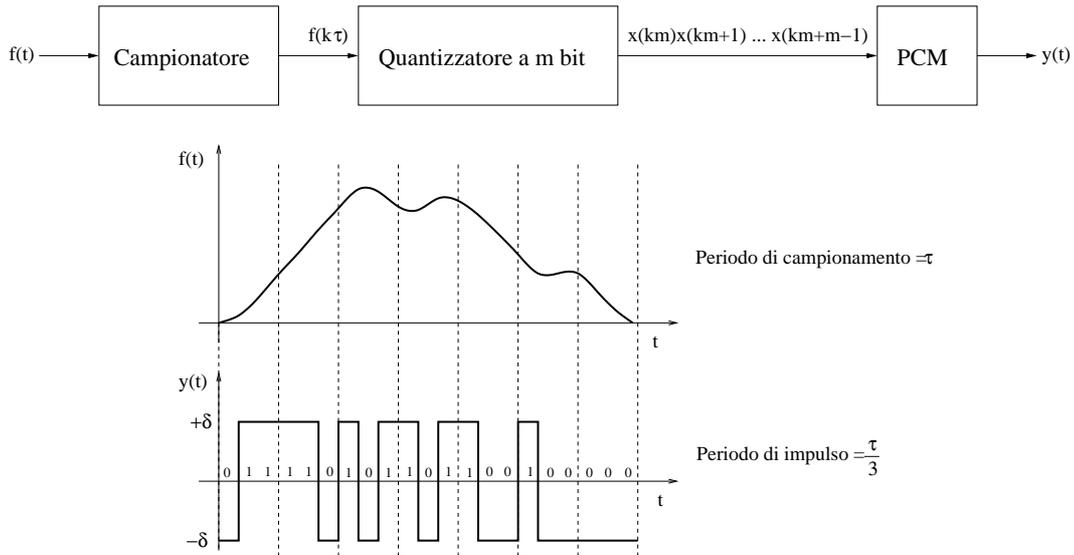


Figura 4.26 Modulazione a Impulso con  $m = 3$ .

Questa particolare codifica di segnali con forme d'onda "digitali" è detta *Modulazione a Impulso* (PCM - Pulse Coded Modulation). Varianti possono essere ottenute con diverse codifiche dei livelli di quantizzazione.

Dato un quantizzatore a  $m$  bit, sono infatti possibili molte codifiche distinte dei  $2^m$  livelli di quantizzazione. Tre comuni codifiche sono mostrate in Tabella 4.1 per un quantizzatore a 8 livelli ( $m = 3$ ).

La codifica naturale coincide con l'usuale rappresentazione binaria dei numeri interi  $0, 1, \dots, 2^n - 1$ . Nella codifica con segno il primo bit significativo rappresenta il segno; essa corrisponde all'usuale codifica dei numeri interi relativi  $-2^{n-1} + 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ . Una terza rappresentazione è la codifica di Gray, in cui le parole binarie che identificano due livelli consecutivi differiscono di un solo bit; questa codifica è interessante perché un errore sulla codifica di un livello  $k$  dà luogo in generale a livelli mediamente "vicini" a  $k$ , rendendo più semplice il meccanismo di rilevamento e correzione di errore in ricezione.

Tabella 4.1 Codifiche del livello di quantizzazione.

$N^\circ$ livello	Codifica naturale	Codifica con segno	Codifica di Gray
1	000	011	010
2	001	010	011
3	010	001	001
4	011	000	000
5	100	100	100
6	101	101	101
7	110	110	111
8	111	111	110

### 4.5.2 Delta-Modulazione

Una seconda soluzione può essere ottenuta con una tecnica detta *Delta-Modulazione (DM)*. Essa è realizzata dal convertitore analogico-digitale con quantizzatore a 1 bit mostrato in Figura 4.27.

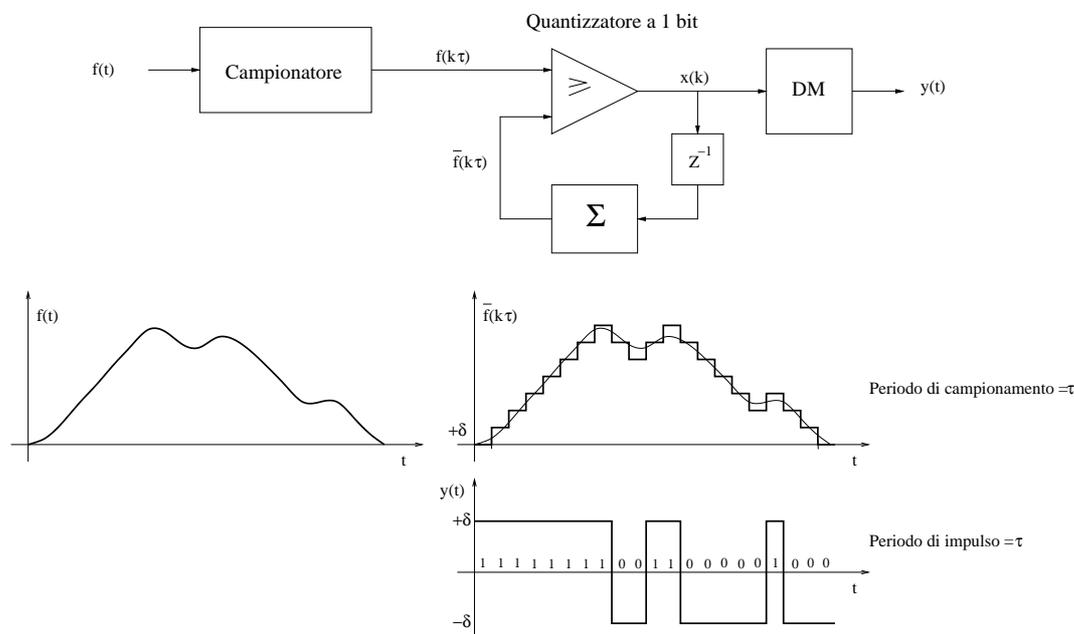


Figura 4.27 Delta-Modulazione (DM).

Il segnale analogico  $f(t)$  viene campionato con periodo  $\tau$  e ai tempi  $k\tau$  viene posto in uscita un segnale binario  $x(k)$ , dove  $x(0) = 0$  e:

$$x(k) = \begin{cases} +\delta & \text{se } \bar{f}(k\tau) \geq \sum_{j=0}^{k-1} x(j) \\ -\delta & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si osservi che la delta-modulazione richiede di trasmettere solo 1 bit per ogni campione, mentre la PCM richiede di trasmettere  $m$  bit per ogni campione. Tuttavia la DM presenta uno svantaggio: fissato  $\delta$ , essa può trattare efficacemente segnali di opportuna pendenza e ampiezza, altrimenti si generano errori sistematici, come illustrato in Figura 4.28.

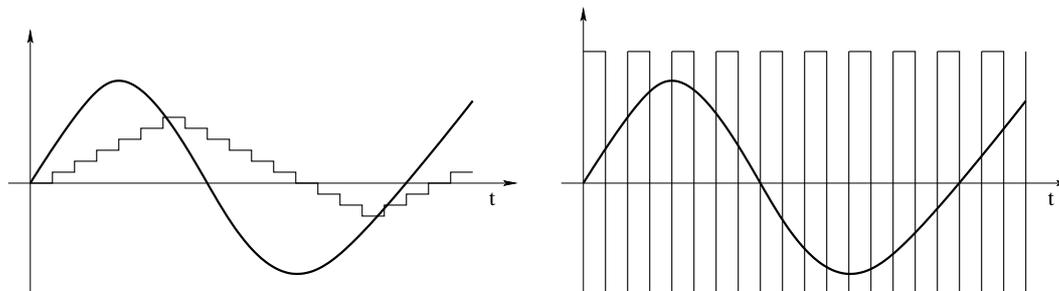


Figura 4.28 Errori introdotti dalla DM.

Essa richiede dunque preliminarmente di conoscere alcune caratteristiche del segnale. Allo scopo di ridurre la dipendenza di questa tecnica dal tipo di segnale, sono state studiate e introdotte varianti della PM, più costose ma più flessibili, come la DPCM (Differential Pulse Coded Modulation) o la DPCM adattativa.

Naturalmente è possibile accoppiare le tecniche di modulazione con algoritmi di compressione. Un esempio importante sarà mostrato in Sezione 5.5.

### 4.5.3 Codifica di Linea

Una volta che il segnale è stato codificato con una sequenza di 0 e 1, esso può essere elaborato o trasmesso su un opportuno canale. Se si vuol trasmettere l'informazione direttamente in forma digitale, senza modulazione analogica, è necessario assegnare ad ogni simbolo 0 o 1 del messaggio da trasmettere un opportuno segnale rettangolare all'interno di una durata di  $\tau$  secondi. Quest'operazione, che fa corrispondere ad ogni parola di 0 e 1 un segnale composto da rettangoli, viene detta *codifica di linea*.

Vi sono varie possibili codifiche di linea; di alcune di esse diamo qui una descrizione sommaria.

1. Nella codifica unipolare NRZ, 1 viene rappresentato col valore  $+V$  per la durata di tutto l'intervallo  $\tau$ , mentre lo 0 col valore 0 per tutto l'intervallo  $\tau$ . Qui "unipolare" significa che i valori possibili del segnale sono 0,  $+V$ ; NRZ (NonReturn to Zero) significa che il segnale corrispondente a 1 non ritorna mai a 0 nell'intervallo  $\tau$ .
2. Nella codifica polare RZ, 1 viene rappresentato col segnale che vale  $+V$  per la prima metà dell'intervallo  $\tau$  e vale 0 nella seconda metà, mentre 0 viene rappresentato col segnale che vale  $-V$  per la prima metà dell'intervallo  $\tau$  e vale 0 nella seconda metà. Qui "polare" significa che i valori possibili del segnale sono  $+V$ , 0,  $-V$ ; RZ (Return to Zero) significa che il segnale nell'intervallo di ampiezza  $\tau$  torna a 0.
3. Nella codifica bipolare 0 viene rappresentato col valore 0 per la durata di tutto l'intervallo  $\tau$ , mentre 1 viene rappresentato alternativamente col segnale che vale  $+V$  per la prima metà dell'intervallo  $\tau$  e vale 0 nella seconda metà, o  $-V$  nella prima metà e 0 nella seconda.

La Figura 4.29 mostra il segnale che corrisponde nelle varie codifiche di linea al messaggio 10110100111.

Vi sono naturalmente importanti differenze tra le varie codifiche. Ad esempio, dal punto di vista dell'errore di trasmissione, si può osservare che la codifica bipolare permette di rilevare un errore di trasmissione, a causa dell'alternanza delle polarità nella codifica degli 1.

Dal punto di vista dell'analisi spettrale, si può dimostrare che l'energia del segnale associato alla codifica bipolare è concentrata per frequenze minori di  $1/\tau$ , che è il tasso di trasmissione, mentre per la codifica polare RZ tale energia è concentrata sotto il doppio del tasso di trasmissione.

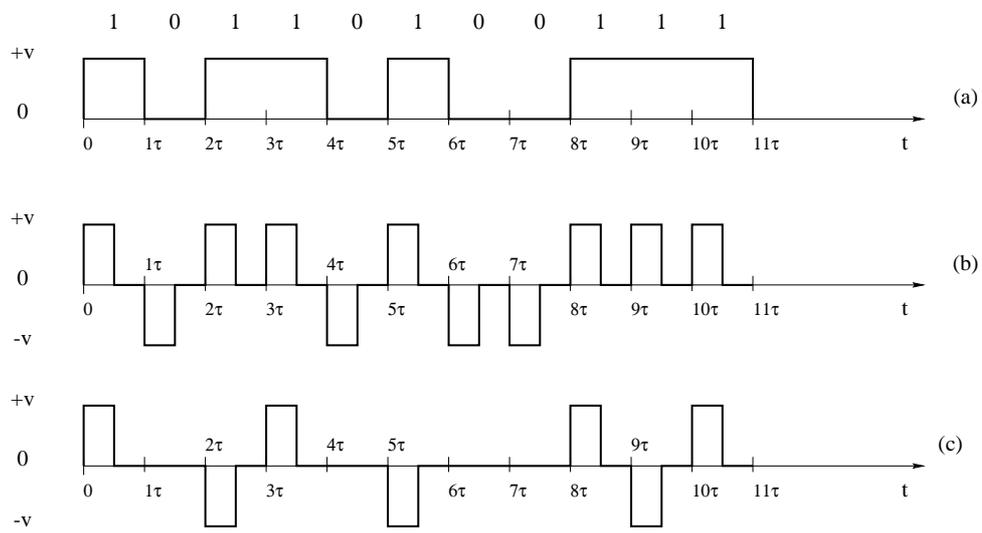


Figura 4.29 Codifiche di linea: (a) unipolare NRZ, (b) polare RZ, (c) bipolare RZ.

## TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER

La trasformata di Fourier permette di trattare i segnali a tempo continuo dal punto di vista delle loro componenti armoniche (analisi in frequenza). In modo analogo la trasformata di Fourier a tempo discreto permette l'analisi in frequenza dei segnali a tempo discreto. Questo argomento viene trattato in Sezione 1 e ripreso, in connessione alla Trasformata zeta, in Capitolo 7.

I segnali a tempo discreto possono essere approssimati con segnali digitali. L'analisi in frequenza di tali segnali può essere ottenuta mediante la Trasformata Discreta di Fourier (DFT), motivata in Sezione 2 e trattata in dettaglio in Sezione 3. La DFT è diventata popolare negli anni 50, proprio in relazione alla crescente importanza dei sistemi di elaborazione digitali. Un salto di qualità nell'utilizzo della DFT è stata la scoperta di una classe di algoritmi veloci, genericamente chiamata FFT (Fast Fourier Transform), che permette di calcolare la DFT in tempo quasi lineare nella dimensione dei dati.

Il calcolo diretto della DFT è piuttosto costoso, richiedendo  $O(N^2)$  operazioni di prodotto, dove  $N$  è la dimensione dello spazio su cui si applica la trasformata. Utilizzando essenzialmente tecniche "divide et impera", si ottengono algoritmi FFT che calcolano la DFT riducendo a  $O(N \log N)$  il numero di costose operazioni di moltiplicazione, come discusso in Sezione 4. La drastica riduzione del tempo di calcolo porta a significativi vantaggi ampliando il campo delle possibili applicazioni.

Nell'elaborazione dei segnali la FFT ha tre principali settori di utilizzo:

1. analisi spettrale per segnali digitali, con applicazioni alla sintesi di filtri digitali;

2. calcolo veloce della convoluzione e della correlazione;
3. compressione di dati per la memorizzazione e la trasmissione efficiente degli stessi.

Questi argomenti sono trattati in Sezione 5.5.

Gli algoritmi per la FFT si sono imposti come tecnica di base per l'elaborazione dei segnali dopo il lavoro di Cooley e Tukey [CooTu65]. Cooley, Lewis e Welch [CooLeWe68] attribuiscono questo metodo a Runge (1903); altri autori ne fanno risalire le idee principali addirittura a Gauss.

La FFT è trattata in quasi tutti i testi su elaborazione digitale dei segnali (si veda ad esempio [IfeJer02]) e presenta aspetti di interesse nell'area degli algoritmi (si veda ad esempio [AhHoUl74]); un testo unicamente dedicato a questo argomento è [Bri88]. Tutti gli ambienti s/w per il trattamento di segnali contengono procedure per la FFT e gli attuali elaboratori digitali calcolano la DFT a velocità tale da permettere l'elaborazione in tempo reale di molti segnali, includendo quelli vocali.

## 5.1 Segnali Periodici a Tempo Discreto

Per comprendere la natura dei segnali periodici a tempo discreto, consideriamo il segnale sinusoidale (o fasore)

$$x(n) = A \cos(\Omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty,$$

dove  $n$  è una variabile discreta che denota l'ennesimo campione,  $A$  è l'ampiezza della sinusoide,  $\Omega$  è la frequenza in *radianti per campione* e  $\theta$  è la fase in *radianti*.

Per denotare la frequenza, in luogo alla variabile  $\Omega$ , si usa spesso la variabile  $\Phi$ , legata alla precedente dalla relazione

$$\Omega = 2\pi\Phi,$$

ed ha una dimensione di *cicli per campione*. Con questa posizione il segnale sinusoidale diventa:

$$x(n) = A \cos(2\pi\Phi n + \theta), \quad -\infty < n < \infty. \quad (5.1)$$

Notiamo anzitutto le differenti dimensioni fisiche per la pulsazione e la frequenza rispetto al caso a tempo continuo, derivanti dal fatto che il tempo continuo  $t$  si misura in secondi, mentre il tempo discreto  $n$  va considerato adimensionale.

La Figura 5.1 mostra una sinusoide con frequenza  $\Omega = \pi/6$  radianti per campione (corrispondenti a  $\Phi = 1/12$  cicli per campione) e fase  $\theta = \pi/3$  radianti.

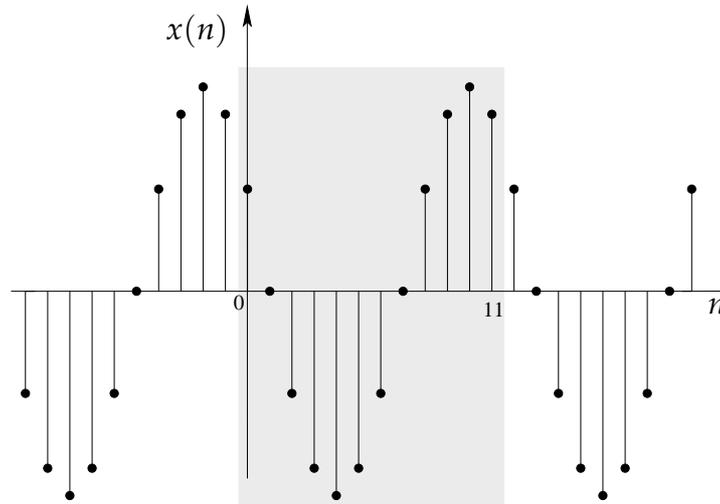
In contrasto con il caso a tempo continuo, che risulta periodico per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ , il segnale sinusoidale a tempo discreto è periodico solo se la sua frequenza è un numero razionale. Infatti, se il fasore è periodico di periodo  $N$  ed ha una frequenza  $\Phi_0$ , deve valere:

$$\cos(2\pi\Phi_0(n + N) + \theta) = \cos(2\pi\Phi_0 n + \theta),$$

che risulta vera se esiste un intero  $k$  tale che:

$$2\pi\Phi_0 N = 2k\pi, \quad \text{o equiv.} \quad \Phi_0 = \frac{k}{N}.$$

Naturalmente il periodo fondamentale è dato dal più piccolo intero  $N_0$  che rende vera l'espressione precedente e in cui  $k$  ed  $N_0$  risultano coprimi. Inoltre, il valore assoluto  $|k|$



**Figura 5.1** Segnale sinusoidale  $x(n) = A \cos(\pi/6n + \pi/3)$  a tempo discreto. La frequenza, misurata in cicli per campione, è  $\Phi = 1/12$ .

del numeratore rappresenta il numero di giri che effettua il fasore prima di riportarsi nella posizione iniziale; il segno di  $k$  è legato al verso di rotazione del fasore (orario se  $k < 0$ , antiorario se  $k > 0$ ).

Un'altra proprietà fondamentale di questi segnali è la *periodicità in frequenza*: due sinusoidi a tempo discreto le cui frequenze sono separate da un multiplo di  $2\pi$  sono identiche.

Questa asserzione può essere provata semplicemente osservando che

$$\cos((\Omega_0 + 2\pi)n + \theta) = \cos(\Omega_0 n + 2\pi n + \theta) = \cos(\Omega_0 n + \theta).$$

Come conseguenza, possiamo restringere il range di frequenze all'intervallo  $[-\pi, \pi]$  se misurate in radianti per campione o all'insieme  $[-1/2, 1/2]$  se misurate in cicli per campione, essendo i segnali con frequenze al di fuori di questo range degli alias di quelli che hanno le frequenze ivi contenute. In altri termini, per segnali a tempo discreto avremo sempre:

$$-\pi \leq \Omega \leq \pi, \quad \text{oppure} \quad -\frac{1}{2} \leq \Phi \leq \frac{1}{2}.$$

Si dovrebbe altresì notare che le frequenze massime si hanno in corrispondenza di  $\Omega = \pm\pi$  (o equivalentemente  $\Phi = \pm 1$ ), per i cui valori il segnale sinusoidale produce una sequenza alternata di 1 e  $-1$ .

D'ora in avanti considereremo un segnale a tempo discreto  $x(n)$  come il risultato del campionamento regolare di un segnale a tempo continuo  $f(t)$ .

$$x(n) = f(n\tau), \quad -\infty < n < \infty.$$

Questo fatto ci permette di stabilire una relazione tra la variabile tempo continuo  $t$  e quello discreto  $n$  che si ripercuote in una relazione altrettanto stretta tra le rispettive frequenze  $\omega$  e  $\Omega$ . Infatti, poiché campionare il segnale sinusoidale a tempo continuo  $f(t) = A \cos(2\pi vt + \theta)$  con periodo  $\tau$  o frequenza  $\nu_s = 1/\tau$  significa ottenere il segnale a tempo discreto

$$x(n) = f(n\tau) = A \cos(2\pi \nu_s n \tau + \theta) = A \cos(2\pi n \frac{\nu}{\nu_s} + \theta). \quad (5.2)$$

Confrontando ora la (5.1) con la (5.2) si deduce che  $\nu$  e  $\Phi$  sono linearmente legate da

$$\Phi = \frac{\nu}{\nu_s}, \quad \text{o equiv.} \quad \Omega = \omega\tau,$$

che giustifica il nome di *frequenza normalizzata* che spesso si attribuisce alla variabile  $\Phi$ .

Per quanto visto finora relativamente alle frequenze, le principali differenze tra segnali a tempo continuo e a tempo discreto si possono riassumere in:

$$-\infty < \omega < \infty, \quad \text{e} \quad -\infty < \nu < \infty$$

per il tempo continuo;

$$-\pi \leq \Omega \leq \pi, \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} \leq \Phi \leq \frac{1}{2}.$$

per il tempo discreto.

Questi risultati ci permettono di stabilire con esattezza la banda di frequenze risultante dal campionamento periodico con frequenza  $\nu_s$  di un segnale  $f(t)$ :

$$-\frac{1}{2\tau} = -\frac{\nu_s}{2} \leq \nu \leq \frac{\nu_s}{2} = \frac{1}{2\tau}, \quad \text{o equiv.} \quad -\frac{\pi}{\tau} = -\pi\nu_s \leq \omega \leq \pi\nu_s = \frac{\pi}{\tau}.$$

Suggeriscono anche che il massimo valore delle frequenze presenti nel segnale campionato  $x(n)$  è  $\Omega_{\max} = \pi/\tau$  o  $\Phi_{\max} = 1/2\tau$ . Dal teorema del campionamento sappiamo che il campionamento periodico introduce un'ambiguità che si elimina a patto di rispettare (quando possibile) il criteriodi Nyquist, altrimenti più segnali analogici possono dare luogo allo stesso segnale a tempo discreto  $x(n)$ , perdendo di fatto l'univocità nella ricostruzione.

## 5.2 Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)

La trasformata e l'antitrasformata di Fourier introdotte nel Capitolo 2 operano su segnali continui, sia nel dominio dei tempi che delle frequenze, e sono definite da:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Fissato un intervallo di ampiezza  $\tau$ , per ogni segnale  $f(t)$  consideriamo il segnale  $f_s(t)$  ottenuto campionando  $f(t)$  ai tempi  $n\tau$  ( $-\infty < n < \infty$ ), e concentrando l'energia ai tempi di campionamento; mediante la funzione impulsiva  $\delta(t)$  tale segnale può essere riscritto:

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau)\delta(t - n\tau).$$

La Figura 5.2 mostra un segnale  $f(t)$  ed il corrispondente segnale campionato  $f_s(t)$ .

Ricordando che  $\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0}$ , per la proprietà di linearità la trasformata di Fourier di  $f_s(t)$  risulta essere:

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau)e^{-i\omega n\tau}. \quad (5.3)$$

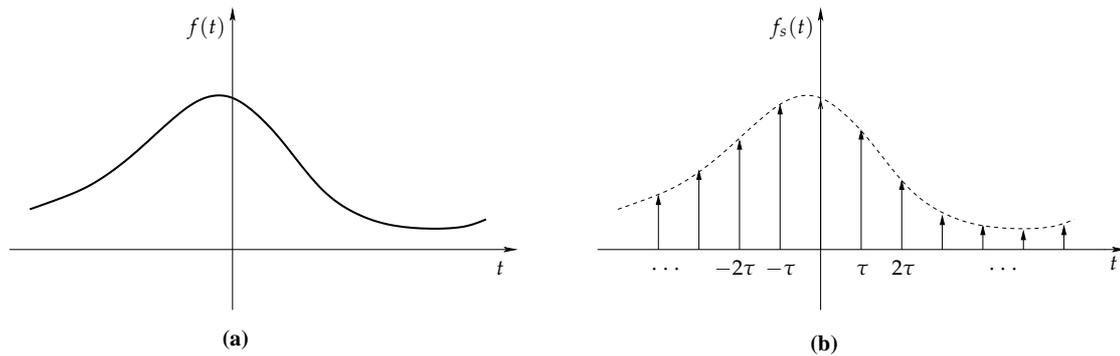


Figura 5.2 (a) Segnale  $f(t)$  continuo. (b) Segnale  $f_s(t)$  campionato.

Infatti:

$$\begin{aligned}
 F_s(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) \delta(t - n\tau) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) e^{-i\omega n\tau}.
 \end{aligned}$$

Operiamo ora il cambio di variabile  $\omega\tau = \Omega$ . Denotando con  $\nu_s = \frac{1}{\tau}$  la frequenza di campionamento in Hz, risulta che  $\Omega = \frac{\omega}{\nu_s}$ . Come detto sopra, la variabile  $\Omega$  assume dunque significato di frequenza normalizzata alla frequenza di campionamento; poiché  $\omega$  è data in rad/sec, mentre  $\nu_s$  è data in cicli/sec,  $\Omega$  è data in radianti.

Poniamo ora:

$$x(n) = f(n\tau), \quad X(\Omega) = F_s\left(\frac{\Omega}{\tau}\right).$$

Con le nuove notazioni, possiamo definire la trasformata di Fourier di un segnale a tempo discreto come:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i\Omega n}. \quad (5.4)$$

In quest'ottica,  $X(\Omega)$  rappresenta la decomposizione di  $x(n)$  nelle componenti in frequenza  $e^{-i\Omega n}$ .

Osserviamo due differenze sostanziali tra la trasformata di un segnale a tempo discreto avente energia finita e un segnale a tempo continuo anch'esso ad energia finita. La prima è che la trasformata del segnale continuo, e quindi il suo spettro, ha frequenze nell'insieme  $(-\infty, +\infty)$ . Diversamente, per segnali a tempo discreto, il range di frequenze è unico nell'intervallo  $[0, 2\pi]$  o equivalentemente  $[-\pi, \pi]$ . La seconda differenza basilare, conseguenza del tempo discreto, è che la trasformata a tempo discreto implica una sommatoria mentre quella a tempo continuo un integrale.

Come mostrato per la sinusoida discreta, la restrizione all'intervallo  $[-\pi, \pi]$  per la trasformata a tempo discreto risulta evidente dalla seguente proprietà di periodicità:

$$X(\Omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i(\Omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i\Omega n} = X(\Omega)$$

ossia, la funzione  $X(\Omega)$  risulta periodica di periodo  $2\pi$ . In virtù della proprietà appena illustrata, vale dunque la seguente espansione in serie di Fourier:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i\Omega n}, \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{i\Omega n} d\Omega.$$

I coefficienti della serie sono quindi i valori della sequenza  $x(n)$ .

Riassumiamo la discussione precedente nel seguente:

**Fatto 5.1.** Sia  $f_s(t)$  il segnale ottenuto campionando  $f(t)$  con passo  $\tau$  e sia  $F_s(\omega)$  la sua trasformata di Fourier. Posto  $x(n) = f(n\tau)$  e  $X(\Omega) = F_s(\frac{\Omega}{\tau})$  vale:

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i\Omega n}, \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{i\Omega n} d\Omega.} \quad (5.5)$$

Le due trasformazioni riportate in Fatto 5.5 sono dette rispettivamente *trasformata e antitrasformata di Fourier a tempo discreto* e, per sottolineare il fatto che la corrispondenza tra le due funzioni è biunivoca, viene spesso usata la scrittura

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} X(\Omega).$$

### Esempio 5.2.1.

Determinare la trasformata di Fourier a tempo discreto di

$$x(n) = a^n u(n), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Poiché la sequenza  $x(n)$  è assolutamente sommabile (serie geometrica con base minore di 1), la trasformata esiste ed è ottenuta applicando la (5.5).

Quindi:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n)e^{-i\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-i\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-i\Omega})^n.$$

Visto che  $|ae^{-i\Omega}| = |a| < 1$ , la somma della serie geometrica è finita e vale

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-i\Omega}}, \quad |a| < 1.$$

Per  $|a| > 1$  la trasformata di Fourier di  $a^n u(n)$  non esiste.

Possiamo concludere che:

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} \frac{1}{1 - ae^{-i\Omega}}, \quad |a| < 1.$$

Lo spettro del segnale esponenziale decrescente è:

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \Omega + a^2}}, \quad \angle X(\Omega) = -\arctan \frac{a \sin \Omega}{1 - a \cos \Omega}.$$

La Figura 5.3 mostra lo spettro della trasformata per i due casi:  $0 < a < 1$  e  $-1 < a < 0$ . Si può notare che il valore negativo di  $a$  determina una rapida variazione del segnale che ne sposta lo spettro verso le alte frequenze.

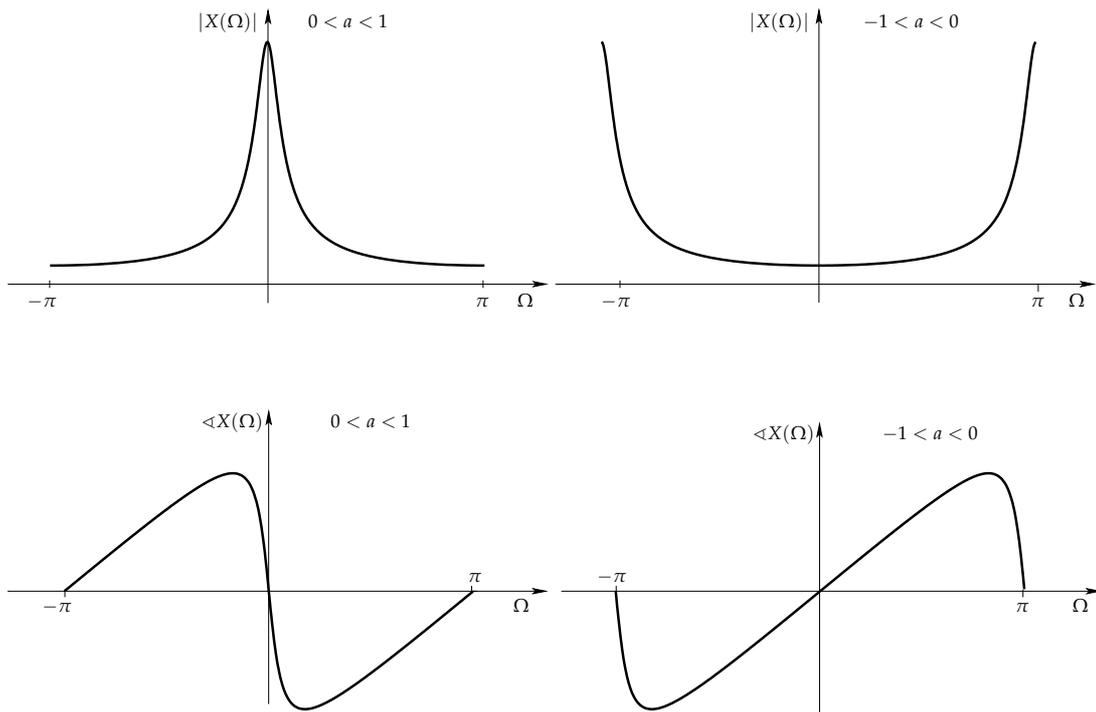


Figura 5.3 Spettro del segnale esponenziale decrescente per i due valori, positivo e negativo, del parametro  $a$ .

### Convergenza della DTFT

Come discusso nel Paragrafo 2.4 del Capitolo 2 a proposito della convergenza della serie di Fourier, spesso la condizione di assoluta sommabilità di  $x(n)$  viene meno, non garantendo così la convergenza uniforme della 5.4. Tuttavia, questa rappresenta solo una condizione sufficiente. Vi sono infatti sequenze che non sono assolutamente sommabili ma che hanno ugualmente definita la trasformata di Fourier: è il caso di segnali che sono quadrato-sommabili o, equivalentemente, ad energia finita:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < +\infty.$$

Per tali segnali possiamo imporre la condizione di convergenza in media quadratica:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega) - X_N(\Omega)|^2 d\Omega = 0,$$

dove  $X_N(\Omega)$  rappresenta la somma parziale delle prime  $N$  armoniche. Il prossimo esempio considera un noto segnale ad energia finita, la cui trasformata è il filtro passa-basso ideale.

#### Esempio 5.2.2.

Sia data la trasformata

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| < \pi' \end{cases} \quad (5.6)$$

determinare il segnale  $x(n)$ .

Consideriamo solo l'intervallo  $[-\pi, \pi)$  a causa della periodicità della funzione  $X(\Omega)$ . Allora, per mezzo dell'antitrasformata si ricava il segnale

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{i\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{i\Omega n} d\Omega = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n}, \quad n \neq 0.$$

Per  $n = 0$ , ricaviamo direttamente dalla definizione di trasformata

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi}.$$

In definitiva, il segnale che si ottiene antitrasformando la 5.6 è:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin(\Omega_c n)}{\Omega_c n} & n \neq 0 \end{cases}.$$

La coppia di trasformate è illustrata nei grafici di Figura 5.4, dove  $\Omega_c = \pi/4$ .

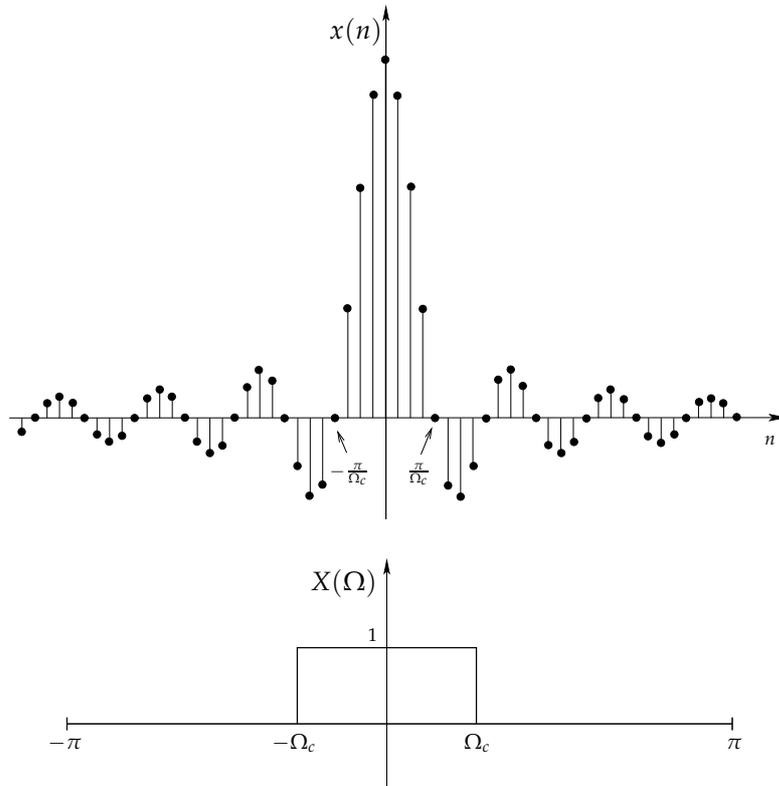


Figura 5.4 Segnale  $\sin(\frac{\pi}{4}n)/\pi n$  a tempo discreto e sua trasformata  $X(\Omega)$ .

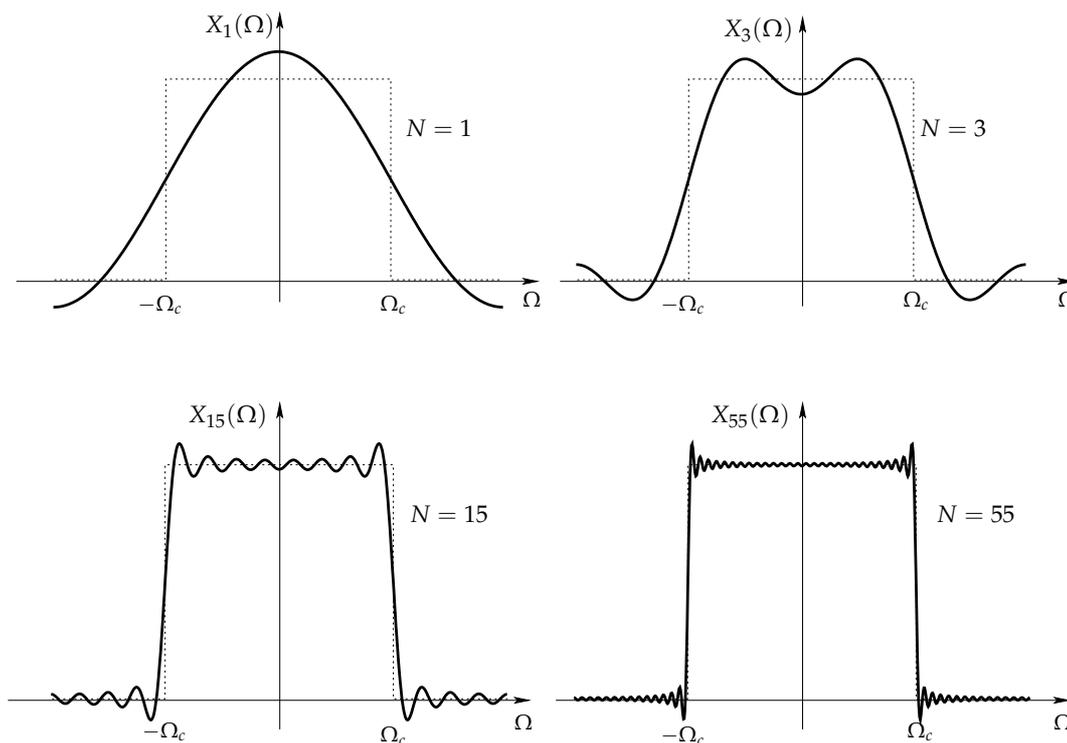
In merito alla convergenza di sequenze  $x(n)$  che non sono assolutamente sommabili, come quella dell'esempio precedente, richiamiamo qui le osservazioni riportate nel paragrafo relativo alle serie di Fourier.

La somma parziale

$$X_N(\Omega) = \sum_{n=-N}^N \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n} e^{-i\Omega n}$$

non converge uniformemente alla 5.6, ma solo puntualmente e questo fatto implica la presenza di oscillazioni nella  $X_N(\Omega)$  in corrispondenza delle frequenze  $\Omega = \pm\Omega_c$ , indipendentemente dai valori di  $N$ . Quando  $N \rightarrow +\infty$  le oscillazioni convergono ai punti di discontinuità  $\pm\Omega_c$  ma la loro ampiezza non si annulla: questo comportamento è chiamato *fenomeno di Gibbs*. Lo stesso fenomeno è stato osservato nella convergenza delle somme parziali della serie di Fourier per funzioni a tempo continuo periodiche.

La Figura 5.5 mostra la funzione  $X_N(\Omega)$  per vari valori di  $N$ . Si può osservare che col crescere di  $N$  le oscillazioni diventano più rapide, ma la loro ampiezza non si smorza, semplicemente si addossa sempre più al punto di discontinuità  $\Omega_c$ .



**Figura 5.5** Illustrazione della convergenza della trasformata di Fourier e relativo fenomeno di Gibbs nel punto di discontinuità  $\Omega_c$ .

### 5.2.1 Proprietà della Trasformata di Fourier a Tempo Discreto

In questa sezione vengono riportate alcune delle più importanti proprietà della trasformata di Fourier a tempo discreto. Esse risultano di particolare utilità nella semplificazione del processo di analisi di segnali e sistemi, come visto anche per la trasformata a tempo continuo, che può risultare parecchio oneroso in molti casi. Alcune proprietà, come la linearità o la simmetria hermitiana, non vengono richiamate perché la loro dimostrazione ricalca specularmente quelle già viste precedentemente.

#### Traslazione Temporale

Se

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} X(\Omega), \quad \text{allora} \quad x(n-m) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} e^{-i\Omega m} X(\Omega).$$

Questa proprietà si prova direttamente operando un cambio di variabile nella della trasformata di  $x(n - m)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_d \{x(n - m)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - m)e^{-i\Omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-i\Omega(k+m)} \quad (\text{ponendo } k = n - m) \\ &= e^{-i\Omega m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-i\Omega k} = e^{-i\Omega m} X(\Omega).\end{aligned}$$

### Traslazione in Frequenza

Dato  $\mathcal{F}_d \{x(n)\} = X(\Omega)$ , calcoliamo la trasformata di  $e^{i\Omega_0 n} x(n)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_d \{e^{i\Omega_0 n} x(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{i\Omega_0 n} e^{-i\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i(\Omega - \Omega_0)n} \\ &= X(\Omega - \Omega_0),\end{aligned}$$

da cui:

$$e^{i\Omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} X(\Omega - \Omega_0).$$

### Teorema di Convolutione

Supponiamo che

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} X(\Omega) \quad \text{e} \quad y(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} Y(\Omega).$$

La convoluzione tra i due segnali è espressa come:

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)y(n - k).$$

Allora:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_d \{x(n) * y(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)y(n - k) \right] e^{-i\Omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n - k)e^{-i\Omega n} \quad (\text{scambiando le somme}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-i\Omega k} \cdot Y(\Omega) \quad (\text{per la prop. di trasl. temporale}) \\ &= X(\Omega)Y(\Omega),\end{aligned}$$

ricavando la nota coppia trasformata/antitrasformata

$$x(n) * y(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} X(\Omega)Y(\Omega).$$

Come vedremo di seguito, con l'aiuto di algoritmi veloci per il calcolo (anche se approssimato) della trasformata, il teorema di convoluzione suggerisce che lo studio della relazione ingresso-uscita di sistemi LTI può essere convenientemente effettuato nel dominio delle frequenze (attraverso l'uso della trasformata e antitrasformata) piuttosto che nel dominio del tempo mediante l'innaturale e complessa operazione di convoluzione. Il vantaggio dato dunque da tali trasformazioni è quello di una effettiva "algebrizzazione" del processo di analisi del comportamento del sistema.

### 5.3 Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

La trasformata di Fourier a tempo discreto è applicabile a segnali campionati; tali segnali sono a tempo discreto e con frequenza normalizzata nel continuo  $[0, 2\pi)$ . Per poter trattare opportune approssimazioni di tali segnali con tecniche digitali, dobbiamo ulteriormente:

1. considerare solo un numero finito di campioni nel tempo;
2. effettuare un campionamento anche in frequenza, così da considerare solo un numero finito di frequenze anziché l'intervallo continuo  $[0, 2\pi)$ .

Per quanto riguarda il primo punto, l'obiettivo che ci si è posto può essere raggiunto approssimando l'informazione contenuta in un segnale  $f(t)$  con quella ottenuta dal vettore  $x$  formato da  $N$  campioni del segnale campionato con passo  $\tau$ :

$$x = [x(0), \dots, x(N-1)], \quad \text{con} \quad x(n) = f(n\tau), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Il vettore  $x$  "cattura" quindi l'informazione del segnale contenuta nell'intervallo temporale  $[0, (N-1)\tau]$ ;

Il secondo punto prevede di considerare il vettore  $X$  formato da  $N$  campioni della trasformata a tempo discreto  $X(\Omega)$ , campionata a intervalli di ampiezza  $\frac{2\pi}{N}$ :

$$X = [X(0), \dots, X(N-1)], \quad \text{con} \quad X(k) = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

dove, con abuso di notazione, abbiamo denotato con la stessa variabile il vettore  $X(k)$  che rappresenta la DFT e la funzione complessa che rappresenta la trasformata di Fourier a tempo discreto  $X(\Omega)$ .

Sotto l'ipotesi che l'energia del segnale sia essenzialmente contenuta negli  $N$  campioni  $x(0), \dots, x(N-1)$  vale che:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = X(k).$$

Possiamo pertanto approssimare la trasformata di Fourier con la seguente trasformazione tra vettori complessi  $N$ -dimensionali:

**Definizione 5.1.** La trasformazione  $\mathcal{F}_{DFT} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  che associa al vettore  $x(n)$ , con  $n = 0, \dots, N-1$ , il vettore  $X(k)$ , con  $k = 0, \dots, N-1$  nel seguente modo:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

è detta Trasformata Discreta di Fourier (DFT).

La trasformazione  $\mathcal{F}_{\text{DFT}}$  è lineare e invertibile e la sua inversa  $\mathcal{F}_{\text{DFT}}^{-1}$ , detta antitrasformata, è data da:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Questo risultato può essere dimostrato a partire dall'identità:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} N, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Infatti:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N & \text{se } n = 0 \\ \sum_{k=0}^{N-1} \left( e^{-i\frac{2\pi}{N}n} \right)^k = \frac{\left( e^{-i\frac{2\pi}{N}n} \right)^N - 1}{e^{-i\frac{2\pi}{N}n} - 1} = 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

Ora per verifica diretta abbiamo che se  $x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kj}$  allora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kj} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} e^{i\frac{2\pi}{N}kj} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-j)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \begin{cases} N, & \text{se } n = j \\ 0, & \text{se } n \neq j \end{cases} \\ &= \frac{1}{N} \cdot Nx(j) = x(j). \end{aligned}$$

In conclusione la coppia trasformata-antitrasformata discreta di Fourier è riassunta di seguito, per  $k = 0, \dots, N-1$  e  $n = 0, \dots, N-1$ :

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kn}.} \quad (5.7)$$

### 5.3.1 Proprietà della DFT

Nello spazio dei vettori a  $N$  componenti complesse si possono introdurre alcune importanti operazioni:

Prodotto:  $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n),$

Traslazione ciclica:  $(\text{Shift}_a f)(n) = f(\langle n - a \rangle_N),$

Convoluzione Ciclica:  $(f \otimes g)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot g(\langle n - k \rangle_N),$

dove con  $\langle s \rangle_N$  si intende il resto della divisione intera di  $s$  con  $N$  e il simbolo  $\otimes$  denota la convoluzione ciclica.

Queste operazioni hanno forti analogie con le operazioni su funzioni a variabile complessa che abbiamo precedentemente introdotto; non stupisce allora che la trasformata

Tabella 5.1 Proprietà della Trasformata Discreta di Fourier.

Proprietà	$\mathbf{x(n)}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{X(k)}$
Linearità	$ax(n) + by(n)$		$aX(k) + bY(k)$
Traslazione ciclica	$x(\langle k - a \rangle_N)$		$e^{-i2\pi an} F(n)$
Convoluzione ciclica	$x(n) \otimes y(n)$		$X(k)Y(k)$

discreta goda di proprietà simili a quelle della trasformata continua. In Tabella 5.1, in cui denotiamo con  $X(k)$  la trasformata di Fourier di  $x(n)$  e con  $Y(k)$  la trasformata di Fourier di  $y(n)$ , elenchiamo le principali proprietà.

Delle proprietà sopra elencate, dimostriamo qui l'importante proprietà di convoluzione ciclica, che asserisce che la trasformata di una convoluzione ciclica è il prodotto, componente per componente, delle trasformate.

Sia  $h = x \otimes y$  e  $H(k)$  la sua trasformata discreta di Fourier. Per definizione di convoluzione ciclica e di trasformata discreta abbiamo:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \cdot y(\langle n - j \rangle_N) \right) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Osservando che

$$e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-j)},$$

possiamo scrivere:

$$H(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} \left( \sum_{n=0}^{N-1} y(\langle n - j \rangle_N) e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-j)} \right) \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Se poniamo  $n - j = s$ , quando si verifica  $0 \leq n \leq N - 1$  allora  $\langle s \rangle_N$  varia in  $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ , e

$$e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-j)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}ks}.$$

Possiamo concludere che

$$H(k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j) e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} \sum_{s=0}^{N-1} g(s) e^{-i\frac{2\pi}{N}ks} = F(k)G(k) \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Ricordiamo infine che per la trasformata discreta di Fourier vale l'analogo della relazione di Parseval (vedi la (2.17)):

$$\sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |F(n)|^2.$$

## 5.4 Calcolo Veloce della Trasformata Discreta: Algoritmo FFT

La principale ragione che rende importante la DFT è l'esistenza di algoritmi veloci per il suo calcolo; essi adottano la tecnica divide-et-impera che consiste nella decomposizione ricorsiva della DFT in trasformate di dimensioni ridotte ogni volta della metà. Presentiamo qui l'idea base quando la dimensione della DFT  $N$  è una potenza di 2.

La DFT richiede di moltiplicare un vettore a  $N$  componenti  $[x(0), \dots, x(N-1)]$  per la matrice  $N \times N$  la cui componente alla riga  $n$  e colonna  $k$  è:

$$W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Tale calcolo può essere ovviamente effettuato con  $O(N^2)$  operazioni di somma e prodotto, poichè il calcolo di ognuna delle  $N$  componenti  $X(k)$  richiede  $O(N)$  operazioni. Algoritmi più efficienti per il calcolo della trasformata sono stati proposti tra gli altri da Runge e König nel 1924 e da Cooley e Tukey nel 1965. Questi algoritmi richiedono  $O(N \log N)$  invece di  $O(N^2)$  operazioni e per tal motivo sono chiamati algoritmi *FFT* (*Fast Fourier Transform*).

Secondo la notazione qui introdotta, la trasformata discreta può essere scritta come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (5.8)$$

Separando nella sommatoria i termini di indice pari da quelli di indice dispari, si ottiene:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n \text{ pari}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n \text{ dispari}} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{k2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{k(2n+1)}. \end{aligned}$$

Poichè vale  $W_N^2 = W_{N/2}$ , si ha:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{N/2}^{kn} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Dato che le sequenze  $X_1(k)$  e  $X_2(k)$  sono periodiche di periodo  $N/2$ , cioè  $X_1(k+N/2) = X_1(k)$  e  $X_2(k+N/2) = X_2(k)$  e, siccome vale che  $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ , possiamo riscrivere la  $X(k)$  come:

$$\begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ X(k + \frac{N}{2}) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che il calcolo di  $X_1(k)$ , così come di  $X_2(k)$ , richiede  $(N/2)^2$  moltiplicazioni di due numeri complessi; il numero di moltiplicazioni richieste per  $W_N^k X_2(k)$  è invece  $N/2$ . Complessivamente, per calcolare  $X(k)$  occorrono  $2(N/2)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2$  moltiplicazioni, che rappresenta una riduzione di un fattore 2 circa (per  $N$  grande) rispetto alle  $N^2$  operazioni richieste per il calcolo della 5.8. Se operiamo ricorsivamente secondo la strategia appena illustrata, dimezziamo la complessità ad ogni passo di ricorsione dimezzando al

contempo la lunghezza della sequenza numerica su cui si opera. Così facendo, se  $N = 2^l$ , quando la sequenza di ingresso si riduce ad un solo campione la procedura ricorsiva è stata invocata  $l = \log_2 N$  volte.

In Algoritmo 1 viene mostrata l'implementazione in pseudocodice di detta procedura.

---

**Algoritmo 1**


---

```

procedure FFT ( $[y(0), \dots, y(N-1)]$ )
  if  $N = 1$  then
     $Y(0) \leftarrow y(0)$ 
    return  $[Y(0)]$ 
  else
     $[p(0), p(1) \dots, p(\frac{N}{2}-1)] \leftarrow \text{FFT}([y(0), y(2) \dots, y(N-2)])$ 
     $[d(0), d(1) \dots, d(\frac{N}{2}-1)] \leftarrow \text{FFT}([y(1), y(3) \dots, y(N-1)])$ 
    for  $k = 0$  to  $N-1$  do
       $Y(k) \leftarrow p(\langle k \rangle_{\frac{N}{2}}) + W_N^k d(\langle k \rangle_{\frac{N}{2}});$ 
    end for
  end if
  return  $[Y(0), \dots, Y(N-1)]$ 

```

---

Il calcolo della trasformata di un vettore a  $N$  componenti richiama ricorsivamente il calcolo della trasformata di 2 vettori a  $N/2$  componenti con  $O(N)$  operazioni di somma e prodotto aggiuntive. Detto  $T(N)$  il numero totale di operazioni per calcolare la trasformata di un vettore a  $N$  componenti, vale allora:

$$T(N) = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 1, \\ 2T(N/2) + O(N) & \text{se } N > 1. \end{cases}$$

Poiché la soluzione alla precedente equazione di ricorrenza è  $T(N) = O(N \log N)$ , l'algoritmo FFT permette una forte riduzione della complessità in tempo per il calcolo della trasformata. In particolare, l'analisi esposta sopra mostra che il calcolo della FFT richiede esattamente  $(N/2) \log_2 N$  moltiplicazioni di numeri complessi.

L' algoritmo veloce per il calcolo della trasformata inversa è del tutto simile.

## 5.5 Applicazioni della Trasformata Discreta di Fourier

Nell'elaborazione dei segnali, la FFT ha tre principali settori di utilizzo:

1. analisi spettrale di segnali analogici e digitali, con applicazioni alla sintesi di filtri digitali;
2. calcolo veloce della convoluzione e della correlazione;
3. compressione di dati per la memorizzazione e la trasmissione efficiente degli stessi.

Per quanto riguarda la relazione tra la trasformata di Fourier  $F(\omega)$  e la trasformata discreta di Fourier, se le varie approssimazioni fatte (passo di campionamento  $\tau$ , numero  $N$  di campioni) risultano ragionevolmente buone, allora:

$$x(n) = f(n\tau), \quad n = 0, \dots, N-1$$

implica che

$$X(k) \approx F\left(\frac{2\pi k}{N\tau}\right), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Queste approssimazioni risultano accettabili quando l'intervallo di campionamento in un dominio (per esempio il tempo) consente di avere un aliasing trascurabile nell'altro dominio (frequenza).

Si hanno essenzialmente tre situazioni distinte:

1. segnali periodici (tempo) a banda limitata (frequenza): questa è l'unica classe di segnali per cui la trasformata discreta e quella continua coincidono (a meno di un fattore di scala);
2. segnali di durata limitata (tempo), cioè non nulli in un intervallo temporale finito: tali segnali non sono banda limitata (frequenza), per cui il campionamento produce aliasing che si può solamente ridurre ad un valore accettabile ma non eliminare. La trasformata discreta differisce pertanto da quella continua a causa di errori introdotti dall'aliasing.
3. segnali di durata non limitata, cioè a supporto temporale di dimensione infinita e non a banda limitata (frequenza): la trasformata discreta differisce da quella continua a causa di errori sia di aliasing che di troncamento.

Giustificiamo, mediante una trattazione qualitativa, le precedenti affermazioni che mettono in luce le condizioni sotto le quali la DFT permette di calcolare in modo approssimato la trasformata di Fourier  $F(\omega)$  di un segnale  $f(t)$ .

A tal riguardo, supponiamo che, come illustrato in Figura 5.6:

1. per un opportuno  $\tau$ , sia  $F(\omega) \approx 0$  per  $|\omega| > \frac{\pi}{\tau}$ ;
2. per un opportuno  $T$ , sia  $f(t) \approx 0$  se  $t < 0$  o  $t > T$ .

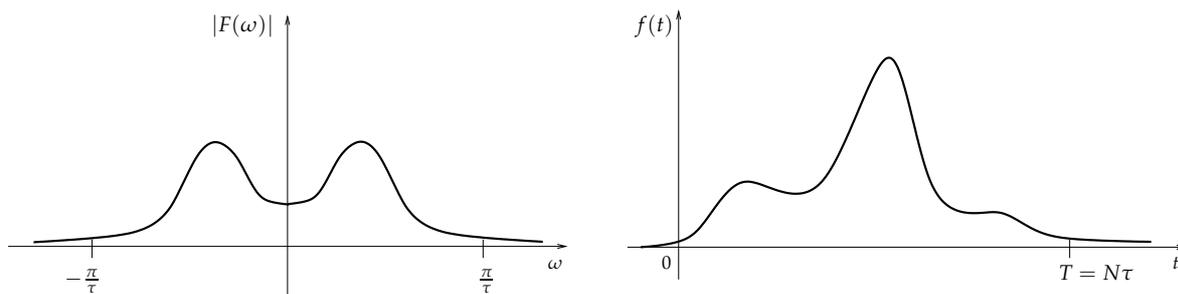


Figura 5.6 Localizzazione in tempo e frequenza di un segnale.

Per l'ipotesi 1, il segnale  $f(t)$  è essenzialmente individuato dal suo campionamento  $x(n) = f(n\tau)$  con periodo  $\tau$ . Posto ora  $N = T/\tau$ , per l'ipotesi 2 possiamo concludere che  $f(t)$  è essenzialmente individuato dal vettore  $[x(0), \dots, x(N-1)]$ .

Sotto le ipotesi date, vale che:

$$F(\omega) \approx \tau \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\omega n} \quad (5.9)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &\approx f(t) \int_0^{N\tau} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{per ipotesi 1}) \\ &\approx \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau)\tau e^{-i\omega n\tau} \quad (\text{approssimando l'integrale con la somma}). \end{aligned}$$

La DFT del vettore  $[x(0), \dots, x(N-1)]$  è il vettore  $[X(0), \dots, X(N-1)]$  dove:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad (5.10)$$

Dalla (5.9) e dalla (5.10) segue allora:

$$F\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \approx \tau X(k) \quad (5.11)$$

La (5.11) permette di approssimare la trasformata di Fourier continua mediante il calcolo della DFT.

Altre applicazioni della DFT sono legate alla simulazione di sistemi LTI mediante una tecnica di calcolo veloce della convoluzione basata sulla FFT, e all'uso della trasformata coseno, che consiste essenzialmente nella parte reale della DFT, per la compressione di segnali.

### Convoluzione e Correlazione

Sia  $S$  un sistema LTI per segnali a tempo discreto. Sappiamo che  $S$  è individuato dalla sua risposta  $h(n)$  all'impulso, ed in particolare che la risposta  $y(n)$  al segnale  $x(n)$  è data dalla convoluzione  $h * x$ :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k).$$

La convoluzione è dunque centrale nello studio dei sistemi LTI; tra le operazioni ad essa riferite ricordiamo ad esempio la identificazione di sistema (dati un segnale-test  $x$  e la risposta  $y$ , determinare la risposta all'impulso  $h$ ), di deconvoluzione (data l'uscita  $y$  e la risposta  $h$  all'impulso, determinare l'ingresso  $x$ ), la deconvoluzione cieca (stimare l'ingresso  $x$  conoscendo solo l'uscita  $y$ !).

Consideriamo ora segnali a tempo discreto  $x(n)$  in un arco temporale finito, per esempio nulli prima di 0 e dopo  $N-1$ ; essi possono quindi essere descritti da un vettore  $[x(0), \dots, x(N-1)]$ . La convoluzione tra  $x$  e  $h$  è data dal vettore  $y$  a  $2N$  componenti dove:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (0 \leq n \leq 2N-1).$$

Un'altra operazione tra segnali di grande interesse è la correlazione temporale, che verrà discussa in Capitolo 9. Limitatamente a segnali  $x(n)$  e  $y(n)$  nulli prima di 0 e dopo  $N-1$ , la loro cross-correlazione temporale  $R_{xy}(j)$  è:

$$R_{xy}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(k+j) \quad (-N+1 \leq j \leq N-1).$$

Sia ora  $z(n) = y(N - 1 - n)$ , cioè  $z$  è il vettore ottenuto leggendo  $y$  in ordine inverso. Si verifica facilmente:

$$R_{xy}(N - 1 - j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)z(j - k) \quad (0 \leq j \leq 2N - 1).$$

Essendo l'inverso della correlazione di due vettori la convoluzione di un vettore per l'inverso dell'altro, il calcolo della correlazione è riducibile a quello della convoluzione.

Studiamo ora il problema di determinare algoritmi efficienti per il calcolo della convoluzione. Si tratta di progettare algoritmi che, avendo in ingresso due vettori  $[x(0), \dots, x(N - 1)]$  e  $[y(0), \dots, y(N - 1)]$  diano in uscita il vettore  $2N$ -dimensionale  $[z(0), \dots, z(N - 1)]$  con:

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(n - k) \quad (0 \leq n \leq 2N - 1).$$

Le prestazioni degli algoritmi saranno misurate dal numero di moltiplicazioni richieste.

L'algoritmo che implementa direttamente la formula, richiede per il calcolo di  $z(n)$   $n + 1$  prodotti se  $0 \leq n \leq N - 1$ , oppure  $2N - n + 1$  prodotti se  $n > N - 1$ . Il numero totale di prodotti è allora  $N^2 + N$ .

Osserviamo ora che  $z$  è la convoluzione ciclica dei 2 vettori  $2N$ -dimensionali  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  ottenuti aggiungendo  $N$  zeri ai 2 vettori  $N$ -dimensionali  $x$  e  $y$ , come segue:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= [x(0), \dots, x(N - 1), 0, \dots, 0], \\ \hat{y} &= [y(0), \dots, y(N - 1), 0, \dots, 0], \end{aligned}$$

quindi

$$z = \hat{x} * \hat{y}.$$

Indicando con  $\mathcal{F}_d$  e  $\mathcal{F}_d^{-1}$  rispettivamente la trasformata e l'antitrasformata discreta di Fourier, a causa della proprietà della convoluzione ciclica, si ha:

$$z = \mathcal{F}_d^{-1} \{ \mathcal{F}_d \{ z \} \} = \mathcal{F}_d^{-1} \{ \mathcal{F}_d \{ \hat{x} * \hat{y} \} \} = \mathcal{F}_d^{-1} \{ \mathcal{F}_d \{ \hat{x} \} \mathcal{F}_d \{ \hat{y} \} \}.$$

L'algoritmo precedente calcola la convoluzione applicando tre volte l'algoritmo FFT a vettori di dimensione  $2N$  ed eseguendo  $2N$  ulteriori moltiplicazioni complesse, per un totale di  $3N \log_2 2N + 2N$  moltiplicazioni complesse.

Poiché una moltiplicazione complessa richiede a sua volta 4 moltiplicazioni, concludiamo che l'algoritmo calcola la convoluzione di 2 vettori  $N$ -dimensionali con  $12N \log_2 2N + 8N$  moltiplicazioni, contro le  $N(N + 1)$  moltiplicazioni richieste dal metodo diretto.

### Trasformata Coseno e Compressione Dati

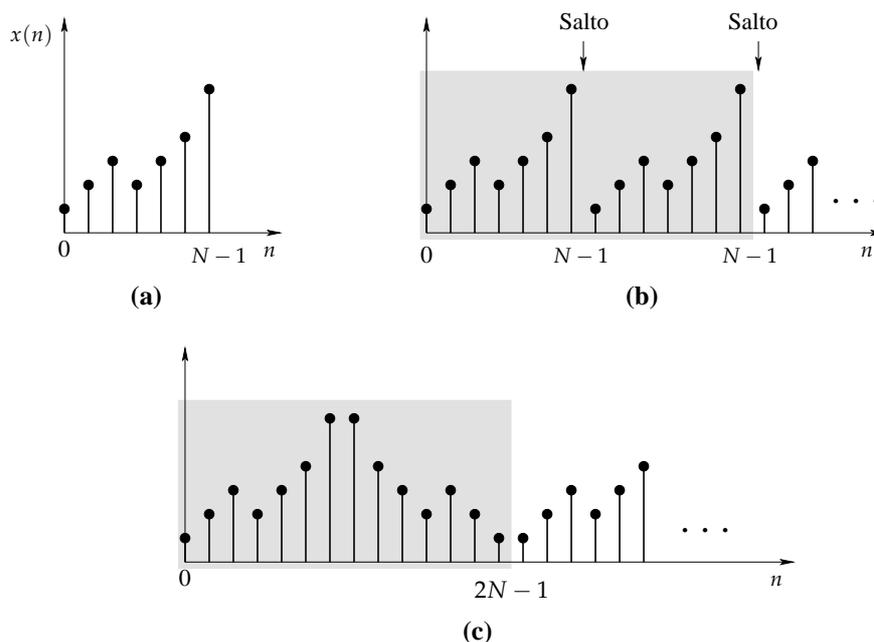
La compressione dei dati è una problematica di grande interesse con applicazione, ad esempio, nella trasmissione di segnali audio e video o per la memorizzazione di segnali biomedici. I dati compressi presentano in generale due vantaggi:

1. possono essere trasmessi a velocità più elevata;
2. applicando ad essi algoritmi per il riconoscimento di caratteristiche, si hanno tempi di risposta più contenuti.

Allo scopo di chiarire il concetto di compressione, ricordiamo che un segnale discretizzato può essere visto come un vettore monodimensionale (segnale temporale) o bidimensionale (immagine) a  $N$  componenti. In questo contesto, l'operazione di compressione può essere descritta mediante una trasformazione  $M : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , con  $M < N$ . Poiché dal segnale compresso  $y = M(x)$  non è in generale possibile ricostruire univocamente il segnale originale  $x$ , un parametro importante della compressione è l'errore di ricostruzione.

Data una famiglia di segnali, l'operatore di compressione che, tra le trasformazioni lineari, minimizza l'errore quadratico di ricostruzione è ottenibile dalla cosiddetta *trasformata di Karhunen-Loève*, descritta per esempio in [DeOb97]. Essa associa ad ogni vettore  $[x(0), \dots, x(N-1)]$  un vettore  $[K(0), \dots, K(N-1)]$  tale che la "informazione" contenuta in  $K(j)$  è maggiore di quella contenuta in  $K(j+1)$ , con  $j = 0, \dots, N-2$ : la compressione ottima di  $[x(0), \dots, x(N-1)]$  in un vettore ad  $M$  componenti è il vettore  $[K(0), \dots, K(M-1)]$ .

Questa tecnica, detta *analisi delle componenti principali*, richiede tuttavia di conoscere la distribuzione dei segnali ed è computazionalmente costosa. Se tuttavia ipotizziamo di trattare segnali con spettro concentrato sulle basse frequenze, un risultato simile alla trasformata di Karhunen-Loève può essere ottenuto applicando la DFT; un inconveniente di questa scelta sta nel fatto che la DFT tratta il segnale  $[x(0), \dots, x(N-1)]$  come segnale periodico  $[x(0), \dots, x(N-1), x(0), \dots]$ , introducendo "salti" fittizi (vedi Figura 5.7(b)) che comportano la presenza di alte frequenze.



**Figura 5.7** (a) Segnale finito. (b) Segnale reso periodico. (c) Segnale ripetuto specularmente.

Allo scopo di moderare i salti, il segnale può essere ripetuto in modo speculare come in Figura 5.7(c), ottenendo il nuovo segnale  $[z(0), \dots, z(2N-1)]$  con:

$$z(k) = \begin{cases} x(k), & \text{se } 0 \leq k \leq N-1 \\ x(N-1-k), & \text{se } N \leq k \leq 2N-1. \end{cases}$$

Il segnale  $z$  contiene ovviamente la stessa informazione del segnale  $x$ . Applicando la DFT a  $z$  e ricordando che  $z = [x(0), \dots, x(N-1), x(N-1), \dots, x(0)]$ , si ottiene per  $k = 0, \dots, 2N-1$ :

$$\begin{aligned} Z(k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} x(n) e^{-i\frac{2\pi nk}{2N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[ e^{-i\frac{2\pi nk}{2N}} + e^{-i\frac{2\pi(2N-n-1)k}{2N}} \right] \quad (\text{per la simmetria di } z) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 2x(n) \frac{e^{-i\frac{\pi k}{2N}(2n+1)} + e^{i\frac{\pi k}{2N}(2n+1)}}{2} e^{i\frac{\pi k}{2N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 2x(n) \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(2n+1)\right) e^{i\frac{\pi k}{2N}} \end{aligned}$$

Ponendo  $X_c(k) = NZ(k)e^{-i\frac{\pi k}{2N}}$  e considerando le prime  $N$  componenti, si ottiene la trasformazione:

$$X_c(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 2x(n) \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(2n+1)\right) \quad (0 \leq k \leq N-1).$$

Questa trasformazione viene chiamata *Trasformata Discreta Coseno* (DCT). Come abbiamo visto, essa può essere calcolata direttamente mediante la FFT; sono stati comunque implementati algoritmi per il calcolo della DCT che richiedono ancora meno moltiplicazioni.

Per quanto riguarda l'inversa della DCT, è possibile provare che:

$$x(n) = \frac{X_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} X_c(k) \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(2n+1)\right) \quad (0 \leq n \leq N-1).$$

### Esempio 5.5.1.

*Compressione nello standard JPEG.*

Una immagine rettangolare digitalizzata è rappresentata da una matrice  $N \times M$  di pixel (picture element)  $s(j, k)$ , valori numerici che denotano attributi dell'immagine come intensità o colore. Le immagini occupano parecchia memoria; per esempio, una immagine a colori di  $320 \times 240$  pixel, ognuno dei quali contiene le intensità dei tre colori fondamentali (rosso, giallo, verde) per 1 byte l'uno, occupa  $320 \times 240 \times 3 = 230$  kbyte, equivalenti a circa 75 pagine di testo.

La gestione di immagini richiede dunque efficienti algoritmi di compressione: presentiamo qui schematicamente l'algoritmo di compressione raccomandato nello standard JPEG (Joint Photographic Experts Group). Ricordiamo che la standardizzazione è necessaria per permettere lo scambio di immagini tra differenti applicazioni, supportate ad esempio da Personal Computer, Reti, CD ROM, macchine fotografiche digitali.

L'algoritmo di compressione in JPEG, illustrato in Figura 5.8, prevede i seguenti passi descritti schematicamente.

**Calcolo della DCT.** L'immagine viene divisa in blocchi di  $8 \times 8$  pixel e di ogni blocco viene calcolata la trasformata coseno bidimensionale:

$$S(i, l) = \frac{1}{4} C(i) C(l) \sum_{j=0}^7 \sum_{k=0}^7 s(j, k) \cos((2j+1)i\pi/16) \cos((2k+1)l\pi/16),$$

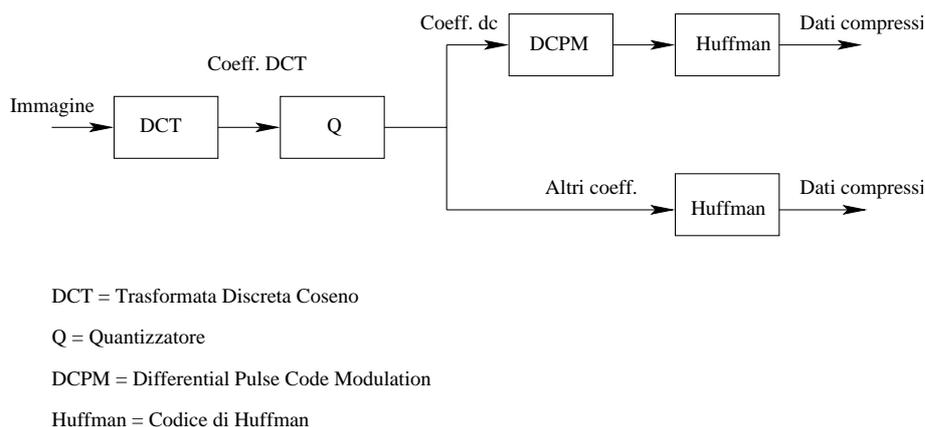


Figura 5.8 Compressione dati JPEG.

dove:

$$C(i) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{se } i = 0 \\ 1 & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

La trasformata viene ottenuta calcolando dapprima la DCT di ogni riga, formando con i vettori ottenuti una nuova matrice e calcolando infine la DCT di ogni colonna. Si osservi che ogni matrice  $8 \times 8$  così ottenuta contiene in alto a sinistra le ampiezze delle basse frequenze e in basso a destra le ampiezze delle alte frequenze.

**Quantizzazione dei coefficienti.** Per ogni blocco, ognuna delle 64 componenti viene quantizzata con un quantizzatore uniforme e arrotondata con un intero; questa procedura crea matrici a componenti intere con molti zeri in basso a destra.

**Codifica.** Per ogni blocco, il coefficiente in alto a sinistra  $S(0,0)$  è il termine *dc* e rappresenta la ampiezza media del segnale nella matrice. Mediamente blocchi adiacenti hanno valori simili del termine *dc*, pertanto è conveniente trattare questo coefficiente in modo differente dai rimanenti 63. I termini *dc* vengono convenientemente precompressi utilizzando la DPCM (Differential Pulse Code Modulation), un'estensione della Delta-modulazione analizzata in Sezione 4.5. Tutti gli altri coefficienti sono ordinati a zig-zag (vedi Figura 5.9) e codificati con l'algoritmo di Huffman, che permette di ottenere il codice prefisso avente lunghezza media di codifica minima.

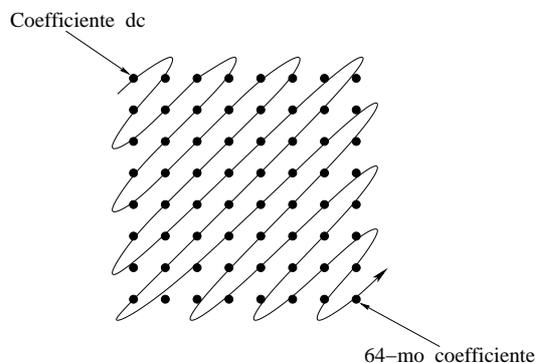


Figura 5.9 Ordine a zig-zag.

La decodifica avviene semplicemente invertendo le operazioni di codifica. Questo tipo di codifica permette tassi di compressione fino a 20:1.

**Esempio 5.5.2.** 

---

Si considerino immagini di  $1024 \times 1024$  pixel con 256 livelli di grigio. Determinare il tasso di trasmissione necessario a trasmettere un flusso di 25 immagini al secondo, compresse con un fattore 20 (si trascuri il tempo necessario a comprimere e decomprimere l'immagine). Ogni pixel richiede  $\log_2 256 = 8$  bit, cioè 1 byte. Ogni immagine compressa consiste di  $1024 \times 1024 \times 1/20 = 50$  Kbyte. Il tasso di trasmissione dovrà essere  $50 \times 25$  kbyte/sec, cioè 1.25 Mbyte/sec.

## ARCHITETTURE DSP

Un convertitore *analogico-digitale* (ADC) trasforma un segnale a tempo continuo in una sequenza di bit; viceversa un convertitore *digitale-analogico* (DAC) trasforma una sequenza di bit in un segnale a tempo continuo. Avendo a disposizione un elaboratore che abbia in input l'uscita di un ADC e dia la sua uscita in input a un DAC, si può pensare di simulare a tutti gli effetti un sistema  $S$ , caratterizzato dalla sua relazione input-output, con un programma  $\text{Prog}_S$  che renda commutativo il diagramma in Figura 6.1.

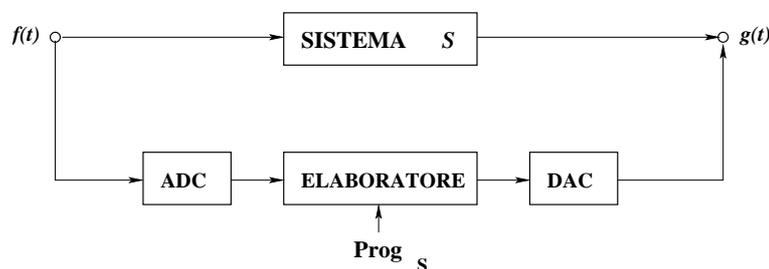


Figura 6.1 Elaborazione di segnali mediante conversione analogico-digitale e digitale-analogico.

A tutti gli effetti pratici, il sistema  $S$  viene realizzato attraverso l'implementazione di un opportuno algoritmo, riducendo in linea di principio la sintesi di sistemi ad uno speciale

problema di programmazione su architetture eventualmente specializzate: questa area di attività è detta *elaborazione numerica di segnali*.

La prima parte di questo capitolo è dedicata ad analizzare i diversi approcci (software e hardware) all'elaborazione digitale dei segnali, discutendo vantaggi e svantaggi che l'elaborazione digitale ha rispetto a quella analogica. Un ampio spettro di applicazioni riguarda l'elaborazione in tempo reale: questo tipo di applicazioni richiede generalmente alta velocità di elaborazione, da cui la necessità di specializzare l'architettura degli elaboratori.

Si discutono i punti deboli, per questo tipo di applicazioni, dei microprocessori basati sull'architettura Von Neumann e si introduce la più adeguata architettura Harvard. Si analizzano alcune scelte effettuate per aumentare la velocità di elaborazione: architetture RISC, livelli di integrazione delle varie componenti dell'elaboratore, h/w specializzato per l'esecuzione veloce della moltiplicazione. Si conclude con un breve cenno all'attuale linea di tendenza, fortemente basata sui principi dell'elaborazione parallela sincrona: architetture per macchine SIMD (Single Instruction Multiple Data) e architetture superscalari.

## 6.1 Elaborazione Digitale dei Segnali: Approcci

In generale, si possono distinguere fondamentalmente due approcci all'elaborazione digitale dei segnali:

**L'approccio mediante programmazione.** In questo caso le caratteristiche di sistemi che trasformano segnali vengono simulate da programmi che vengono eseguiti da un elaboratore digitale. La velocità di esecuzione del programma dipende dal tipo di elaboratore ed in particolare dal livello di parallelismo e dalla velocità con cui vengono eseguite le istruzioni. Questo tipo di approccio risulta di grande flessibilità: sistemi totalmente diversi vengono simulati sulla stessa macchina, semplicemente eseguendo algoritmi diversi.

**L'approccio mediante realizzazione h/w.** In questo caso gli algoritmi che simulano i sistemi vengono realizzati in h/w con circuiti dedicati a applicazioni specifiche (ASIC) o mediante circuiti programmabili (PLD). La velocità di elaborazione dipende dalla frequenza di clock e dalla propagazione dei ritardi nei circuiti logici. Questo approccio permette realizzazioni più efficienti delle soluzioni s/w, con velocità di elaborazione maggiore di un fattore  $10^2$ , risultando tuttavia molto meno flessibile, in quanto la simulazione di un nuovo sistema costringe a ridisegnare e rimpiazzare gran parte del circuito.

Entrambe gli approcci portano a soluzioni più precise, affidabili e stabili delle realizzazioni analogiche a parità di costo. In addizione, l'approccio mediante programmazione può ulteriormente essere agevolato fornendo l'elaboratore di un minimo di s/w di base, per esempio per l'auto-diagnosi e per la gestione delle periferiche. Infine, la progettazione di sistemi con tecniche digitali allarga la fascia dei potenziali progettisti, in quanto richiede meno competenze matematiche e fisiche che non la controparte analogica: grazie all'uso di strumenti s/w di ausilio alla programmazione, l'uso di questa tecnologia richiede solo una conoscenza di base dei principi di elaborazione dei segnali e qualche abilità di programmazione.

In conclusione, le soluzioni digitali offrono vari vantaggi rispetto a quelle analogiche. Per prima cosa, i circuiti analogici sono affetti dalla cosiddetta *variabilità*: lo stesso circuito ha comportamenti diversi in dipendenza dalla temperatura di lavoro o dal tempo di

funzionamento, inoltre circuiti con lo stesso disegno hanno caratteristiche diverse a causa dell'intrinseca imprecisione delle componenti. Per contro, soluzioni digitali sono caratterizzate dalla loro *ripetibilità*: circuiti digitali correttamente disegnati produrranno gli stessi risultati in ogni tempo e per ragionevoli range di temperatura. L'approccio mediante programmazione porta inoltre a vantaggi di flessibilità: lo stesso h/w può supportare una infinita gamma di potenziali applicazioni. Va tuttavia segnalato che per particolari applicazioni le soluzioni analogiche hanno minor costo e maggior semplicità, oltre a non incorrere nel rumore di quantizzazione.

## 6.2 Architettura Von Neumann e Harvard

I microprocessori programmabili per l'elaborazione digitali dei segnali possono essere raggruppati nelle seguenti categorie: microprocessori general-purpose, microcontrollori, processori specializzati all'elaborazione dei segnali (DSP).

**Microprocessori general-purpose.** Questi microprocessori devono supportare le più disparate applicazioni, quindi la loro architettura viene progettata per l'ottimizzazione della gestione della memoria; le loro prestazioni nell'elaborazione digitale dei segnali risultano tuttavia mediocri.

**Microcontrollori.** Questi strumenti implementano singole parti di un elaboratore, ad esempio apparecchi per l'input-output, memorie RAM e ROM; l'architettura è generalmente funzionale all'ottimizzazione delle caratteristiche input-output.

**Processori specializzati all'elaborazione dei segnali (DSP).** Questi microprocessori sono appositamente studiati per ottimizzare le prestazioni nell'elaborazione dei segnali. Poiché gli algoritmi per la simulazione di sistemi per segnali consistono spesso nella iterazione di sequenze di semplici operazioni aritmetiche, grande attenzione è posta nell'ottimizzazione dell'unità aritmetico-logica (ALU): i primi DSP sono addirittura stati motivati dalla necessità di accelerare l'esecuzione dell'operazione di moltiplicazione, rispetto agli usuali microprocessori. La necessità di grande velocità di elaborazione imposte dalle applicazioni in tempo-reale richiede inoltre l'introduzione di architetture che sfruttino l'inerente parallelismo di alcune funzionalità, pur sacrificando la semplicità realizzativa e la flessibilità rispetto alle applicazioni.

Per quanto detto, i DSP richiedono architetture di calcolo piuttosto differenti rispetto agli usuali microprocessori general-purpose: discutiamo brevemente qui le principali diversità.

Un elaboratore programmabile riceve in ingresso dati di due diversi tipi: istruzioni per il programma e dati veri e propri. La maggior parte dei microprocessori general-purpose è basata sull'architettura proposta da Von Neumann e realizzata per la prima volta nel 1951 (Figura 6.2), in cui dati e programmi vengono memorizzati nella stessa area di memoria.

Come si può osservare nella precedente figura, esiste un'unica area di memoria per dati e programmi, ed il processore usa gli stessi bus dati e indirizzi per accedervi. Le unità basilari sono l'unità aritmetico-logica (ALU) e l'unità di input-output (IO). La ALU permette l'esecuzione di operazioni aritmetiche, mentre l'unità di input-output gestisce il flusso di dati esterni alla macchina. Per questo tipo di macchina, i programmi sono sequenze di istruzioni e la singola istruzione generalmente contiene un comando di operazione e l'indirizzo del dato su cui il comando deve essere eseguito. Per esempio, si consideri l'istruzione

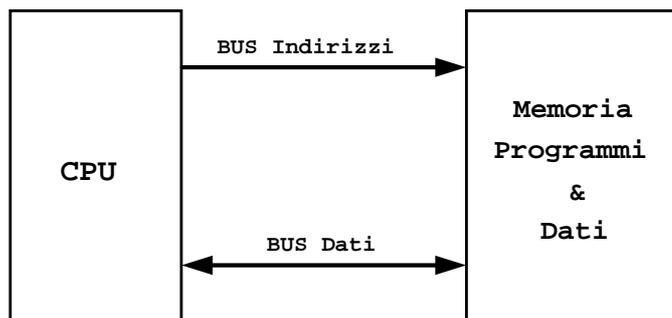


Figura 6.2 Architettura Von Neumann.

STA ADR1: la parte *comando* STA richiede di memorizzare il contenuto dell'accumulatore nel registro di indirizzo ADR1. Tipicamente l'esecuzione di una istruzione prevede tre passi:

1. fetch (preleva l'istruzione)
2. decode (decodifica)
3. execute (esegui)

Poiché dati e programmi sono memorizzati nello stesso spazio di memoria, non è possibile prelevare (fetch) l'istruzione seguente mentre l'istruzione corrente è in esecuzione, poiché entrambe le operazioni prevedono un accesso a memoria: questo comporta un collo di bottiglia, che rallenta la velocità di esecuzione (Figura 6.3).

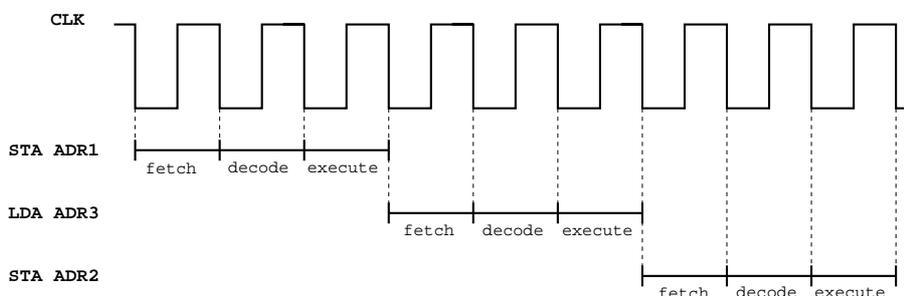


Figura 6.3 Esecuzione di tre istruzioni in un'architettura Von Neumann.

Poiché la velocità di esecuzione è un elemento critico nell'elaborazione dei segnali, l'architettura Von Neumann non è adatta per questo tipo di applicazioni. Va per contro segnalato che la presenza di un'unica area per dati o programmi permette una buona flessibilità nell'uso della memoria: se l'applicazione cambia, il sistema può con facilità riallocare le risorse di memoria per permettere la nuova applicazione.

Un'architettura alternativa che permette un aumento di velocità, come richiesto dalle applicazioni concernenti l'elaborazione dei segnali, è l'architettura di Harvard, proposta negli anni trenta da Howard Aiken all'università di Harvard e realizzata negli anni quaranta (Mark IV ed Eniac). Questa architettura prevede due spazi di memoria, uno per i dati, l'altro per i programmi, e corrispondentemente diversi bus dati e bus indirizzi per accedervi (Figura 6.4).

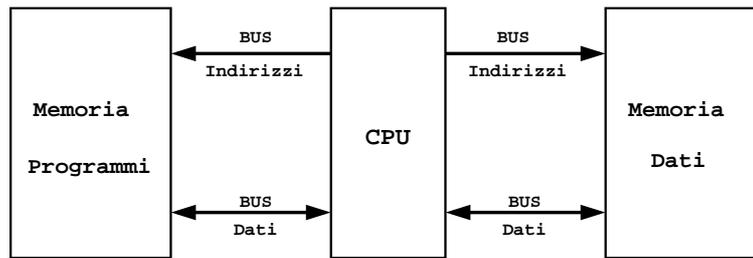


Figura 6.4 Architettura Harvard.

Questa architettura permette di accedere contemporaneamente sia ai dati che alle istruzioni, ottenendo migliori prestazioni in velocità. Infatti la fase di fetch dell'istruzione seguente è effettuabile in parallelo all'esecuzione dell'istruzione corrente, come mostrato in Figura 6.5.

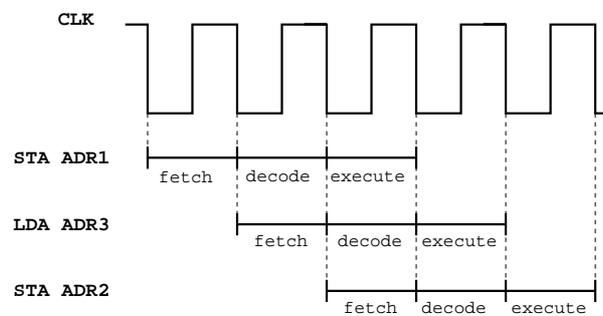


Figura 6.5 Esecuzione di tre istruzioni in un'architettura Harvard.

L'architettura Harvard aumenta la velocità di esecuzione, ma introduce alcuni svantaggi:

- Le componenti h/w necessarie alla realizzazione di una architettura Harvard sono più complesse che per l'architettura Von Neumann, e questo comporta aumento di prezzo.
- Le due distinte aree di memoria per dati e programmi tipiche dell'architettura Harvard non possono essere riallocate con la flessibilità usuale nell'architettura Von Neumann.
- Per ottimizzare le prestazioni, il processore deve prelevare ed eseguire le istruzioni in un unico ciclo macchina: questo pone vincoli e costi che discutiamo in seguito.
- Scrivere programmi per una architettura Harvard è un po' più complicato che per l'architettura Von Neumann.

Per aumentare flessibilità nell'allocazione di spazio di memoria, alcuni processori prevedono speciali blocchi di memoria che possono essere riconfigurati o come memoria per dati o come memoria per programmi. Questo porta a processori con una architettura di *Harvard modificata*: un singolo bus è usato esternamente per dati e indirizzi, mentre due o più bus separati per dati e programmi sono usati internamente.

In Figura 6.6 è mostrato il diagramma a blocchi del DSP TMS320C203 (prodotto da Texas Instruments) basato su un'architettura Harvard modificata.

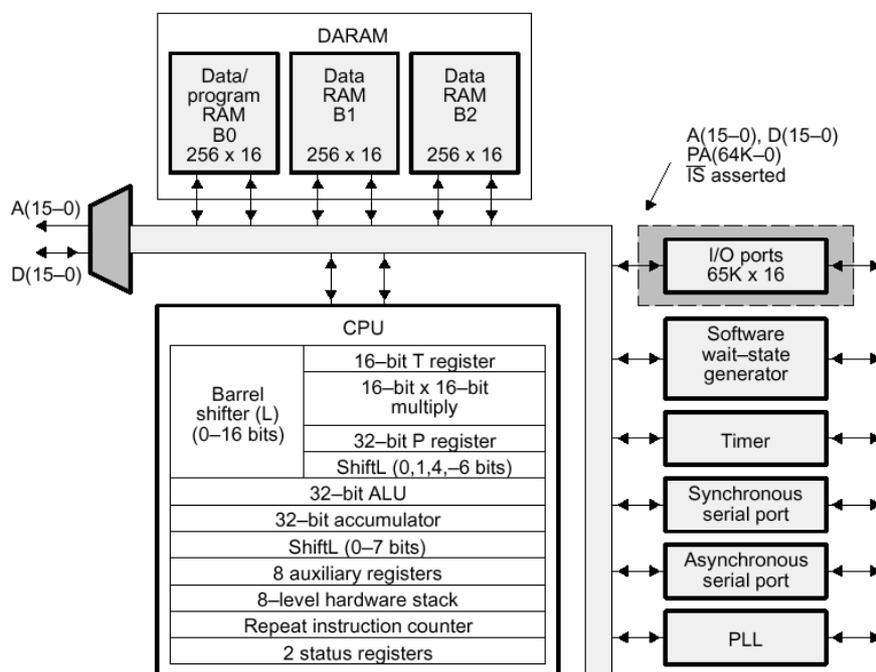


Figura 6.6 Diagramma a blocchi del DSP Texas Instruments TMS320C203.

Osserviamo infine che l'architettura Harvard può essere ulteriormente estesa, permettendo al processore di accedere a varie aree di memoria per dati, ognuna con un proprio bus dati e bus indirizzi.

### 6.3 Istruzioni di Base di un DSP

Per ottenere alta velocità di esecuzione è necessario prelevare, decodificare ed eseguire ogni istruzione nel più breve tempo possibile. Gli approcci-limite tradizionali che vengono seguiti nella progettazione di un microprocessore a questo riguardo sono:

**Approccio VLIW (Very Long Instruction Word).** Viene previsto un insieme di istruzioni di base molto grande, in modo che risolvere un problema richieda programmi con poche istruzioni. Per contro, questa scelta richiede di codificare ogni istruzione con molte parole nell'area programmi, così che prelevare, decodificare ed eseguire una istruzione richiede molti cicli di clock.

**Approccio RISC (Reduced Instruction Set).** Si sceglie di implementare in questo caso solo un piccolo insieme di istruzioni di base. In questo modo la scrittura di un programma richiede più istruzioni, ma ogni istruzione può essere codificata con una sola parola dell'area programmi. Conseguentemente, basta un ciclo di clock per prelevare ed eseguire una istruzione.

Generalmente, algoritmi per elaborazione dei segnali sono implementati con programmi con un modesto numero di istruzioni e risulta invece critica la velocità di esecuzione.

ne della singola istruzione: per questa ragione, l'approccio RISC risulta effettivamente utile, anche se varianti dell'approccio VLIW possono accelerare la velocità di esecuzione mediante la gestione parallela di pacchetti di istruzioni.

La richiesta di poter prelevare ed eseguire una istruzione in un singolo ciclo di clock comporta che la lunghezza della parola che codifica l'istruzione non superi la dimensione del bus di programma. Tale parola contiene due parti: la codifica dell'operazione che deve essere applicata (parte *operazione*) e l'indirizzo della locazione di memoria cui l'operazione va applicata (parte *operando*), come mostrato in Figura 6.7

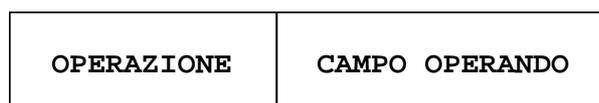


Figura 6.7 Parti di una parola: *operazione* ed *operando*.

I bit della parte *operazione* limitano il numero di istruzioni possibili; la parte *operando* può essere definita usando differenti modi di indirizzamento, ognuno dei quali consuma diversi bit nella parola che codifica l'istruzione. A causa dei limiti alla lunghezza di tale parola, non tutti i modi risultano disponibili nei processori specializzati per l'elaborazione dei segnali; vediamo alcuni.

**Indirizzamento diretto.** In questo caso l'operando specifica direttamente l'indirizzo della locazione di memoria cui applicare l'operazione. Questo modo richiede generalmente un elevato numero di bit nella parte operando dell'istruzione, spesso in conflitto col vincolo sulla lunghezza della parola. In questo caso, si utilizza una memoria detta *registro di pagina*, in cui vengono memorizzati i bit più significativi dell'indirizzo: la parte operando conterrà di conseguenza solo i bit meno significativi dell'indirizzo. L'indirizzamento diretto è quindi ottenuto combinando l'operando col registro di pagina.

**Indirizzamento indiretto.** In questo caso l'operando specifica quale registro-indirizzi dell'unità centrale punta alla locazione di memoria cui applicare l'operazione. La parte operando dell'indirizzamento indiretto usa generalmente un limitato numero di bit.

**Indirizzamento indicato.** In questo caso l'operando specifica un valore di riferimento  $v$  e un registro-indice dell'unità centrale. L'indirizzo della locazione di memoria cui applicare l'operazione si ottiene sommando  $v$  al contenuto del registro-indice. La parte operando dell'indirizzamento indicato usa generalmente un ragionevole numero di bit.

**Indirizzamento circolare.** Algoritmi per l'elaborazione dei segnali fanno spesso uso di buffer first-in first-out (code FIFO). Per semplificare l'uso di tali strutture dati, molti DSP contengono un registro-puntatore che supporta il modo di indirizzamento *modulo*: il contenuto di tale registro è un intero modulo  $m$ , cioè resto della divisione di tale intero con  $m$ , in modo tale che il registro punti sempre a uno di  $m$  indirizzi consecutivi.

**Altri modi di indirizzamento.** Nell'elaborazione dei segnali ci sono algoritmi di base che vengono richiamati frequentemente: può essere allora utile prevedere modi di indirizzamento orientati all'esecuzione efficiente di tali algoritmi. Senza entrare nel merito,

segnaliamo ad esempio l'indirizzamento *bit-reversed* utile ad una implementazione efficiente della FFT.

## 6.4 Livello di Integrazione delle Componenti di un DSP

La richiesta di eseguire ogni istruzione in un singolo ciclo di clock comporta la necessità di realizzare su un singolo chip di silicio il processore, l'area di memoria per i dati, l'area di memoria per i programmi e i rispettivi bus. Nei DSP vengono così integrate su un singolo chip molte delle componenti di un tradizionale computer. Questo pone severe limitazioni alla capacità di memoria dei DSP; fortunatamente, un gran numero di applicazioni richiede programmi con solo poche migliaia di istruzioni e dati per poche migliaia di parole.

Tra le apparecchiature fondamentali che rendono possibile l'elaborazione digitale vanno ricordati i convertitori analogico-digitale (ADC) e digitale-analogico (DAC): interfacciare in modo efficiente il processore digitale con i convertitori ADC e DAC è di grande importanza per una efficiente elaborazione. Sono proposte due soluzioni h/w:

1. integrazione dei convertitori ADC e DAC nello stesso chip del DSP;
2. presenza di h/w speciale per interfacciare efficientemente convertitori e DSP.

Nel primo caso, all'attuale livello di miniaturizzazione, i DSP non possono includere altre componenti, visto il consumo complessivo dell'area di silicio. Questo comporta attualmente forti limiti alle prestazioni di questi DSP.

Nel secondo caso, il processore include una speciale porta seriale per lo scambio di dati, con un numero veramente ridotto di pin di I/O. Questa soluzione permette di interfacciare DSP integrati su un unico chip con potenti convertitori a 24 bit.

## 6.5 H/W Specializzato: Moltiplicazione Veloce

La realizzazione circuitale h/w di una funzione permette tempi di calcolo  $10^2$  volte più bassi della corrispondente realizzazione in software o firmware. Non è pertanto sorprendente che i DSP, nella perenne ricerca di velocità, contengano molte parti di h/w specializzato. Vediamo alcuni importanti esempi.

### Moltiplicazione h/w

Tipiche applicazioni dei DSP, come l'implementazione di un filtro, richiedono di eseguire un ordine di  $10^6 - 10^9$  moltiplicazioni. La velocità di esecuzione della singola moltiplicazione è allora un parametro estremamente critico per la possibilità di elaborazione in tempo reale: soluzioni firmware, che calcolano la moltiplicazione eseguendo un programma sequenziale per la somma iterata, hanno velocità di esecuzione troppo bassa per molte applicazioni. Risulta allora importante sviluppare circuiti dedicati per la moltiplicazione, che ne permettano l'esecuzione in un singolo ciclo di clock.

In Figura 6.8 viene presentato un tipico h/w dedicato *moltiplicatore-accumulatore* (MAC). In questa configurazione, il circuito moltiplicatore possiede una coppia di registri di input a 16 bit ed un registro di output a 32 bit.

Esistono essenzialmente due tipi unità di moltiplicazione:

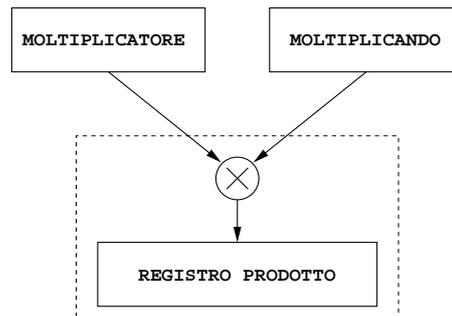


Figura 6.8 Multiplicatore-accumulatore (MAC).

**Unità per la moltiplicazione a virgola fissa.** In questo caso tutte le cifre del numero moltiplicato sono significative, e quindi questa unità ha eccellente velocità e precisione. Tuttavia, per prevenire overflow gli ingressi e l'uscita devono essere scalati via-software in modo da essere valori frazionari compresi tra  $-1$  e  $+1$ . Questo introduce difficoltà nella programmazione.

**Unità per la moltiplicazione a virgola mobile.** La rappresentazione mantissa-esponente permette di processare un grande range di numeri. Dovendosi tuttavia memorizzare l'esponente, rimangono meno bit per memorizzare il numero e la rappresentazione a virgola mobile è meno precisa di quella a virgola fissa; il circuito per la moltiplicazione in virgola mobile è inoltre più complesso e costoso. Il vantaggio è rappresentato dalla maggior semplicità del s/w che richiede effettivamente meno operazioni, poiché non è richiesta alcuna operazione di scala al programmatore.

### Accumulatori speciali

Gli accumulatori sono un elemento critico dell'Unità Centrale; in un DSP, in particolare, è spesso necessario utilizzare numeri complessi oppure, per evitare errori di arrotondamento, risulta opportuno in certe fasi del calcolo considerare un numero maggiore di bit significativi. Questo può essere ottenuto con particolari accumulatori, come gli accumulatori duali che permettono il trattamento di numeri complessi in singolo ciclo macchina, o accumulatori con extra-bit. Poiché inoltre i calcoli causano spesso overflow, è necessario gestire particolari flag che rilevano tale situazione.

### Stack in hardware

Lo stack è una struttura dati per la gestione delle procedure, dovendosi memorizzare gli indirizzi di ritorno delle subroutine e interrupt. La architettura di molti DSP offre una soluzione h/w alla gestione dello stack, includendo una speciale area di memoria separata per tale gestione, cosa che accelera i tempi di chiamata. Lo svantaggio è legato al fatto che, a causa della piccola dimensione di questo spazio di memoria, c'è un severo limite al numero di procedure innestate.

## 6.6 Elaborazione Parallela: SIMD e Superscalari

Avendo come obiettivo miglioramenti significativi nelle prestazioni, l'attuale tendenza nelle architetture per DSP è di aumentare sia il numero di operazioni compiute per istruzione che il numero di istruzioni eseguite per ogni ciclo. Di conseguenza, le architetture dei nuovi DSP devono saper sfruttare in modo intelligente le tecniche di elaborazione parallela. Analizziamo qui brevemente due approcci: *architetture SIMD* e *architetture superscalari*.

Sistemi con architettura SIMD (Single Instruction Multiple Data) devono permettere l'esecuzione parallela della stessa operazione su differenti dati. Per ottenere questo obiettivo, il DSP deve contenere diversi bus dati e diverse unità di elaborazione: in questo modo in un ciclo la stessa istruzione può essere eseguita dalle varie unità di elaborazione su differenti dati. Nella Figura 6.9 viene evidenziata la presenza di due unità di elaborazione e di due bus dati nello stesso DSP.

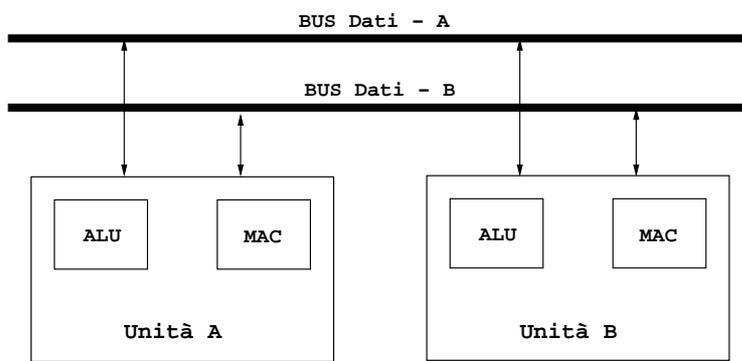


Figura 6.9 Architettura SIMD.

L'elaborazione superscalare è una tecnica per aumentare la velocità di calcolo sfruttando invece il potenziale parallelismo a livello di istruzioni. È noto infatti che, in certe circostanze, alcune istruzioni possono essere eseguite in modo indipendente: avendo a disposizione un adeguato numero di unità di elaborazione, la loro esecuzione in parallelo sulle varie unità accelera il calcolo. Per chiarire con un esempio, si consideri la sequenza di istruzioni

$$\begin{aligned}x &= x + 1; \\ y &= x;\end{aligned}$$

in questo caso le istruzioni non possono essere eseguite in modo indipendente, perché in particolare il risultato dipende dall'ordine di esecuzione. Se invece consideriamo la sequenza

$$\begin{aligned}x &= x + 1; \\ y &= z;\end{aligned}$$

le due istruzioni possono essere eseguite in maniera indipendente: attribuendo a due distinte unità di elaborazione le due istruzioni ed eseguendole in parallelo, si ottiene il risultato corretto diminuendo il tempo di esecuzione. Questo è il principio generale: in una architettura superscalare, differenti unità concorrono all'avanzamento del calcolo eseguendo differenti istruzioni in parallelo. Va da sé che nella programmazione superscalare deve

essere effettuata in modo statico, per esempio a tempo di compilazione, una schedulazione delle istruzioni che eviti i problemi di conflitto creati dalle dipendenze nei dati e nel controllo.



# TRASFORMATA ZETA E SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO

Questo capitolo è dedicato allo studio della trasformata zeta, strumento di analisi dei sistemi LTI a tempo discreto così come la trasformata di Fourier (o meglio quella di Laplace) lo è per quelli a tempo continuo. Storicamente, i fondamenti di questa nozione sono introdotti nei lavori sul calcolo delle probabilità di De Moivre, nella prima metà del 1700; essa ha trovato inoltre feconde applicazioni nel campo della matematica combinatoria, in cui la trasformata zeta è detta “funzione generatrice”.

Essenzialmente, l’idea base è quella di associare iniettivamente ad ogni sequenza  $x(n)$  ( $-\infty < n < +\infty$ ) una funzione  $X(z)$  a variabile complessa, detta trasformata zeta della sequenza  $x(n)$ . Nella prima parte di questo capitolo si discute la base matematica della trasformata zeta. Poiché in gran parte delle applicazioni si considerano segnali a tempo discreto la cui trasformata zeta è una funzione razionale, in prima lettura i primi due paragrafi, dedicati ad approfondimenti matematici generali, possono essere saltati.

Poiché l’introduzione della trasformata richiede alcune nozioni di analisi complessa, che è bene chiarire dall’inizio, nel primo paragrafo vengono richiamati alcuni elementi di analisi utili alla comprensione del resto: serie di potenze, derivata di funzione a variabile complessa, funzioni analitiche e integrali di linea. Nel secondo paragrafo è introdotta la nozione di trasformata zeta e studiato il problema dell’inversa, detta antitrasformata zeta.

In analogia a quanto già visto per la trasformata di Fourier, vengono introdotte nel

terzo paragrafo alcune proprietà della trasformata zeta che risultano utili regole di manipolazione simbolica. Viene analizzato in dettaglio l'importante caso in cui la trasformata zeta risulta essere una funzione razionale.

L'ultima parte del capitolo presenta applicazioni dei concetti introdotti all'analisi di sistemi lineari a tempo discreto. Per prima cosa si osserva che, dato un sistema LTI con risposta all'impulso  $h(n)$ , se  $X(z)$ ,  $Y(z)$  e  $H(z)$  sono le trasformate zeta rispettivamente dell'ingresso, dell'uscita e della risposta all'impulso, risulta (si noti l'analogia con i sistemi LTI a tempo continuo):

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

La trasformata zeta della risposta all'impulso viene anche detta *funzione di trasferimento* del sistema. Sistemi LTI causali e stabili sono caratterizzati mediante semplici proprietà della funzione di trasferimento: i poli di questa funzione devono essere contenuti nel cerchio di raggio unitario.

Il capitolo termina con lo studio della risposta in frequenza di sistemi LTI a tempo discreto: essa è data dalla trasformata di Fourier a tempo discreto della risposta all'impulso ed è derivabile in modo naturale dalla funzione di trasferimento. Mostriamo infine come dai poli e dagli zeri della funzioni di trasferimento si possano ottenere agevolmente informazioni qualitative sul guadagno e sulla fase del filtro.

## 7.1 Richiami di Analisi Complessa

Nel Paragrafo 2.1 abbiamo introdotto la struttura algebrica del campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ , geometricamente descritti da punti di un piano; sottoinsiemi di numeri complessi possono quindi essere rappresentati da opportune figure geometriche.

### Esempio 7.1.1.

L'insieme dei numeri complessi  $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  è il cerchio o disco aperto di centro  $z_0$  e raggio  $r$ .

La regione compresa tra due circonferenze di raggio  $r_1$  e  $r_2$  viene chiamata invece corona circolare:  $C(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$

Per semplicità considereremo solo domini aperti, insiemi cioè per i quali se un punto  $z_0$  vi appartiene, allora esiste un disco  $B_\delta(z_0)$  interamente contenuto nell'insieme.

Consideriamo ora le funzioni a variabile complessa  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  definite su un aperto  $\mathcal{A}$  del piano complesso e introduciamo la seguente nozione di limite:

diremo che  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $|z - z_0| < \delta$  allora  $|f(z) - l| < \varepsilon$ .

Attraverso la nozione di limite possiamo definire (quando esiste) la derivata  $f'(z)$  della funzione  $f(z)$  data come limite del rapporto incrementale:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Dato un sottoinsieme aperto  $\mathcal{A}$ , una funzione  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  è detta *analitica* su  $\mathcal{A}$  se per ogni punto  $z \in \mathcal{A}$  esiste la derivata  $f'(z)$ .

**Esempio 7.1.2.**

Un *polinomio* di grado  $N$  è una funzione del tipo  $P(z) = \sum_{k=0}^N c_k z^k$ , con  $c_N \neq 0$ . Poiché  $P'(z) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)c_{k+1}z^k$ , il polinomio  $P(z)$  risulta essere dunque una funzione analitica su tutto il piano complesso. Richiamando il teorema fondamentale dell'algebra, dato un polinomio  $P(z)$  di grado  $N$ , l'equazione  $p(z) = 0$  ammette  $N$  radici  $z_1, \dots, z_N$ , eventualmente ripetute, tali che:

$$P(z) = c_N(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_N)^{m_N}.$$

Tali radici vengono anche dette *zeri* del polinomio e il numero di ripetizioni  $m_i$  di  $z_i$  è detto molteplicità della radice  $z_i$ . Per ogni radice  $z_k$  vale inoltre:

$$P(z_k) = P'(z_k) = \cdots = P^{(m_k-1)}(z_k) = 0 \quad \text{e} \quad P^{(m_k)}(z_k) \neq 0.$$

**Esempio 7.1.3.**

Una funzione *razionale* è una funzione  $R(z) = P(z)/Q(z)$  ottenuta dal rapporto di due polinomi  $P(z)$  e  $Q(z)$ ; poiché

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - Q'(z)P(z)}{Q^2(z)},$$

tale funzione è analitica su tutto il piano complesso ad eccezione degli zeri del denominatore, cioè i punti per i quali  $Q(z) = 0$ . Gli zeri del numeratore sono detti *zeri* della funzione razionale, mentre gli zeri del denominatore sono detti *poli* della funzione razionale. È importante rilevare che una funzione razionale è, a meno di una costante moltiplicativa, individuata dai suoi zeri e dai suoi poli.

**Esempio 7.1.4.**

Una *serie di potenze* è un'espressione del tipo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

dove  $z_0$  è il centro della serie e gli  $a_k$  i coefficienti.

Ad ogni serie di potenze è associato univocamente un numero non negativo  $r \in [0, +\infty)$  detto *raggio di convergenza* della serie. Esso individua il disco aperto  $B_r(z_0)$  di centro  $z_0$  e raggio  $r$  caratterizzato dalle proprietà:

1. la serie converge assolutamente (cioè  $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k||z|^k < +\infty$ ) per tutti i valori  $z$  all'interno del disco  $B_r(z_0)$ : in questo insieme la sua somma definisce una funzione a variabile complessa  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k||z|^k$ ;
2. La serie non converge (cioè  $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k||z|^k = +\infty$ ) per i valori di  $z$  al di fuori del disco chiuso, cioè  $|z - z_0| > r$ ;
3. il comportamento sul bordo (circonferenza di raggio  $r$  centrata in  $z_0$ ) non può essere specificato dalla sola conoscenza del raggio.

Poiché  $f'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}z^k$ , la funzione  $f(z)$  è analitica nel cerchio aperto di raggio  $r$ .

Richiamiamo ora il concetto di integrazione secondo Cauchy di una funzione complessa lungo una curva  $\Gamma$ .

Supponiamo che  $t \mapsto z(t)$  sia una funzione derivabile con continuità nell'intervallo  $[a, b]$  e che  $\Gamma$  sia una curva semplice contenuta in  $\mathcal{A}$ . Sia  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua a tratti su  $\Gamma$ . Si chiama integrale di  $f$  esteso a  $\Gamma$  il numero complesso

$$I = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

Il modo più chiaro ed espressivo per definire l'integrale è quello delle somme di Cauchy. Consideriamo a tal proposito un cammino regolare (curva continua) chiuso (o circuito)  $\mathcal{C}$  nel piano complesso parametrizzata dall'applicazione

$$t \in [a, b] \mapsto z(t) \in \mathbb{C}, \quad \text{iniettivo in } (a, b), \quad \text{con } z(a) = z(b).$$

Sia data un'arbitraria partizione di  $[a, b]$  in  $N$  punti  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$  corrispondente a un'analogha partizione del cammino  $\mathcal{C}$   $z_1, \dots, z_N$  con  $z_i = z(t_i)$ , contenuto in un aperto  $\mathcal{A}$  e presi percorrendolo in senso antiorario come in Figura 7.1.

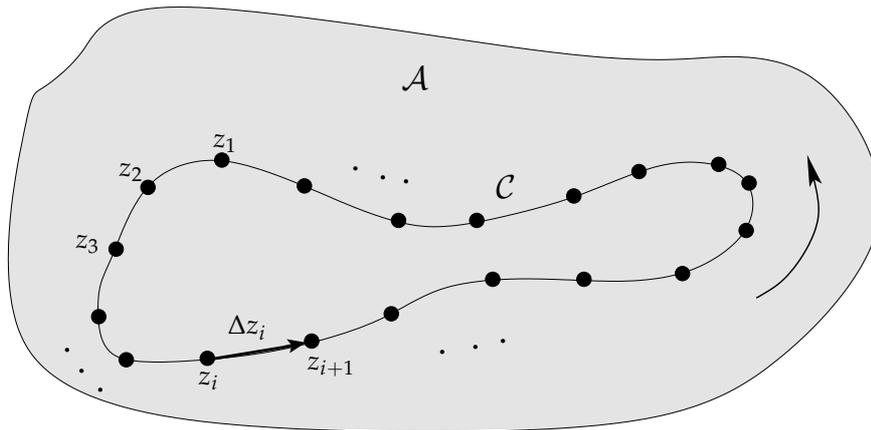


Figura 7.1 Cammino regolare con  $\mathcal{C}$  chiuso definito su un aperto  $\mathcal{A}$  del piano complesso.

Per una data una funzione  $f(z)$  definita su un aperto  $\mathcal{A}$  contenente il cammino  $\mathcal{C}$ , risulta ben definita l'espressione (somma di Cauchy):

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(z_k) \Delta z_k,$$

dove  $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$  e  $z_0 = z_N$ . Si definisce *integrale di linea complesso* (se esiste) il seguente limite:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \lim_{\max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} f(z_k) \Delta z_k.$$

L'integrale così definito dipende solo dal circuito e dal suo orientamento e non dalla partizione scelta; se cambia l'orientamento cambia il segno dell'integrale.

Un risultato centrale nella teoria dell'integrazione complessa è il teorema di Cauchy:

sia  $C$  un circuito semplice contenuto in un aperto  $A$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  sia analitica su tutto il dominio, allora

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

### Esempio 7.1.5.

Un corollario del teorema di Cauchy, che utilizzeremo di seguito, è il seguente:

$$\oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

dove  $C$  è un cammino chiuso che circonda l'origine.

Verifichiamolo nel caso in cui il cammino sia la circonferenza di raggio  $r > 0$  centrata nell'origine. Passando alla forma esponenziale per la variabile  $z$ , si ha:

$$z = re^{i\theta} \quad \text{da cui} \quad dz = ire^{i\theta} d\theta.$$

Possiamo allora concludere che:

$$\oint_C z^{k-1} dz = \int_0^{2\pi} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} (ir) e^{i\theta} d\theta = ir^k \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = \begin{cases} i\theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i, & \text{se } k = 0 \\ r^k \frac{e^{ik\theta}}{k} \Big|_0^{2\pi} = 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases}.$$

### Esempio 7.1.6.

Sia  $R(z) = P(z)/Q(z)$  una funzione razionale; essa può essere espressa come somma di frazioni parziali (vedi Esempio 2.6.2) così che:

$$R(z) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{z - z_k}.$$

Questo è vero quando ogni polo ha molteplicità 1 e il grado del numeratore è minore del grado  $M$  del denominatore (l'estensione al caso generale non presenta particolari difficoltà). Vale allora che:

$$\oint_C R(z) dz = \sum_{k=1}^M A_k \oint_C (z - z_k)^{-1} dz.$$

Osserviamo ora che, ponendo  $z - z_k = re^{i\theta}$  e procedendo come nell'esempio precedente, risulta:

$$\oint_C (z - z_k)^{-1} dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } z_k \text{ è interno alla regione delimitata da } L \\ 0, & \text{se } z_k \text{ è esterno alla regione delimitata da } L \end{cases}.$$

Possiamo allora concludere che:

$$\oint_C R(z) dz = \sum_{z_k \in \hat{C}} 2\pi i a_k.$$

**Esempio 7.1.7.**

Sia  $s(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$  la funzione analitica definita da una serie di potenze con raggio di convergenza  $R$  e sia  $L$  un cammino chiuso contenuto nel cerchio di convergenza. Allora:

$$\oint_L s(z) dz = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \oint_L z^k dz = 0,$$

poiché  $\oint_L z^k dz = 0$  se  $k \geq 0$ .

**7.2 Trasformata e Antitrasformata Zeta**

Introduciamo in questo paragrafo il concetto di trasformata  $z$ . Essa è una trasformazione che associa ad ogni segnale  $x(n)$  un'opportuna funzione a variabile complessa  $X(z)$ , definita su una corona circolare. La trasformata zeta è uno strumento di base per l'analisi in frequenza dei sistemi LTI a tempo discreto.

**Definizione 7.1.** La trasformata  $z$  di una sequenza  $x(n)$  ( $-\infty < n < \infty$ ) a valori reali o complessi è la funzione a variabile complessa  $X(z)$  definita da:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}. \quad (7.2)$$

È talvolta conveniente denotare la trasformata  $z$  della sequenza  $x(n)$  con la scrittura  $\mathcal{Z}\{x(n)\}$ .

La serie  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$  è chiamata serie di Laurent e nella regione del piano complesso in cui converge definisce la funzione a variabile complessa  $X(z)$ . Al fine di individuare la regione di convergenza, osserviamo che  $X(z) = X^-(z) + X^+(z)$ , dove

$$X^-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} \quad \text{e} \quad X^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n},$$

$X^-(z)$  è una serie di potenze nella variabile  $z$ ; se chiamiamo  $R^-$  il suo raggio di convergenza, la funzione  $X^-(z)$  è definita per  $|z| < R^-$ .  $X^+(z)$  è una serie di potenze nella variabile  $z^{-1}$ ; se denotiamo con  $R^+$  il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^n$ , la funzione  $X^+(z)$  è definita per  $|z^{-1}| < R^+$  e quindi per  $|z| > \frac{1}{R^+}$ .

Se  $\frac{1}{R^+} < R^-$ , le funzioni  $X^-(z)$  e  $X^+(z)$  (e quindi la funzione  $X(z)$ ), sono contemporaneamente definite nella corona circolare (mostrata in Figura 7.2) data da:

$$\frac{1}{R^+} < |z| < R^-.$$

**Esempio 7.2.1.**

Si consideri il segnale  $x(n) = a^n u(n)$ , dove  $u(n)$  è:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

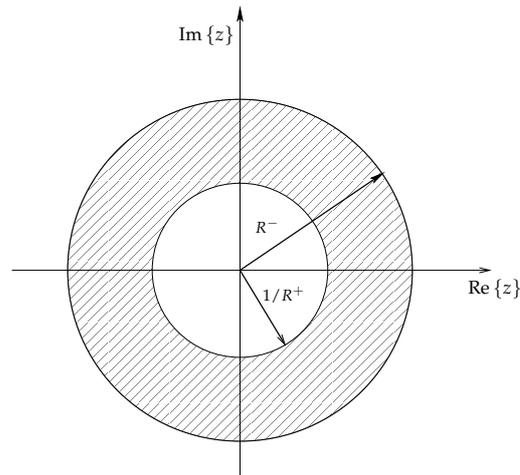


Figura 7.2 Regione di convergenza della trasformata  $z$  bilaterale.

Si osservi che  $u(n)$  è l'analogo discreto del segnale gradino unitario introdotto nell'Esempio 1.3.18.

Dalla (7.2) si ricava:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

In questo caso  $X^-(z) = 0$  è definita su tutto il piano complesso, mentre  $X^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n}$  è definita per  $|z| > |a|$ . Quindi  $X(z)$  è definita per  $|z| > |a|$  come mostrato in Figura 7.3. Si osservi che  $X(z)$  è una funzione razionale, che ha un solo

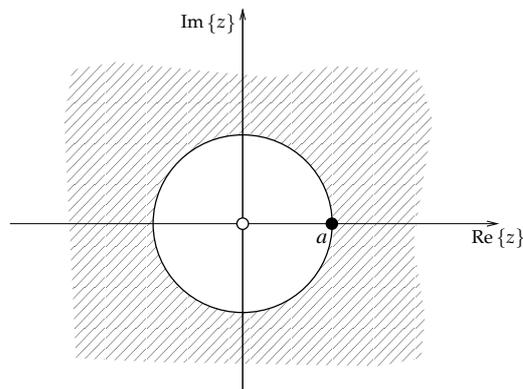


Figura 7.3 Poli, zeri e regione di convergenza della trasformata  $z$  di  $x(n) = a^n u(n)$ .

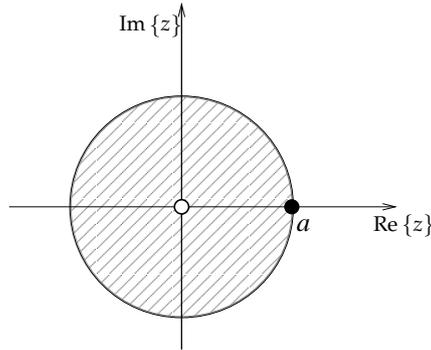
zero in  $z = 0$  e un solo polo in  $z = a$ , rappresentati in figura rispettivamente da un cerchietto e un pallino.

Esempio 7.2.2.

Si consideri ora il segnale  $x(n) = -a^n u(-n-1)$ . In questo caso si ha che:

$$F(z) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = \frac{z}{z-a},$$

che è definita per  $|z| < |a|$ , visto che in questo caso la funzione  $X^+(z) = 0$  è definita su tutto il piano complesso, mentre la funzione  $X^-(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n u(-n-1) z^{-n}$  è definita per  $|z| < |a|$ , come mostrato in Figura 7.4. Anche in questo esempio  $X(z)$  ha



**Figura 7.4** Poli, zeri e regione di convergenza della trasformata  $z$  di  $x(n) = -a^n u(-n-1)$ .

solo zero in  $z = 0$  e un solo polo in  $z = a$ .

Nei due esempi precedenti si sono ottenute le seguenti coppie trasformata–antitrasformata:

$$\begin{aligned} a^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-a}, & |z| > |a| \\ -a^n u(-n-1) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-a}, & |z| < |a|. \end{aligned}$$

Si noti che le trasformate delle due sequenze sono uguali come forma analitica, mentre le regioni di convergenza sono divise. Questi esempi suggeriscono pertanto l'idea che la trasformata  $z$  è completamente specificata da una funzione nella variabile  $z$  e dal suo dominio di definizione, che è dato dalla corona di convergenza. Entrambe queste caratteristiche sono essenziali per determinare univocamente, come vedremo di seguito, la trasformata inversa o antitrasformata  $z$  di una funzione  $X(z)$ . Tale problema può essere posto come segue:

data una funzione  $X(z)$  definita su una opportuna corona circolare  $C$ , determinare la sequenza  $x(n)$  di cui  $X(z)$  è la trasformata zeta.

Consideriamo a questo riguardo l'espressione

$$\oint_L X(z) z^{n-1} dz$$

e integriamo lungo un cammino chiuso  $L$  che includa l'origine e interamente contenuto

nella corona di convergenza di  $X(z)$ . Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}\oint_L X(z)z^{n-1}dz &= \oint_L \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{n-k-1}dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \oint_L z^{n-k-1}dz \\ &= 2\pi i x(n) \quad (\text{per la (7.1)}).\end{aligned}$$

Questo risultato mostra che la trasformata  $\mathcal{Z}$  è invertibile e la sua inversa, che denoteremo con  $\mathcal{Z}^{-1}$  e chiameremo *antitrasformata zeta*, è data da:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L X(z)z^{n-1}dz, \quad (7.3)$$

dove  $L$  è un cammino chiuso contenuto nella corona circolare di convergenza.

Sebbene la (7.3) fornisca la desiderata formula di inversione, essa richiede la valutazione di un integrale di circuitazione che può introdurre a volte complicazioni tecniche legate alla risoluzione analitica dello stesso. Siccome in questa trattazione ci occuperemo esclusivamente di trasformate sottoforma di funzioni razionali, vedremo nel seguito come sviluppare tecniche di inversione basate esclusivamente su combinazioni di trasformate semplici, per le quali la formula inversa è nota, e sulle proprietà della trasformata stessa.

Riassumendo, la coppia trasformata-antitrasformata zeta è:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, \quad x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L X(z)z^{n-1}dz.$$

### Esempio 7.2.3.

Si consideri la trasformata zeta

$$X(z) = \frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)} = \frac{(a-b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}, \quad |z| > a,$$

con  $a$  e  $b$  reali tali che  $0 < b < a$ . La funzione  $X(z)$  ha due poli, rispettivamente in  $z = a$  e  $z = b$  e la regione di convergenza è la regione di piano esterna al polo di ampiezza maggiore  $a$ .

Al fine di trovare la trasformata inversa, applichiamo il metodo delle frazioni parziali secondo il quale  $X(z)$  può essere riscritta come

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})} - \frac{1}{(1-bz^{-1})}.$$

Il problema è quindi ridotto a quello di trovare la trasformata inversa di ognuno delle due frazioni semplici  $\frac{1}{(1-az^{-1})}$  e  $\frac{1}{(1-bz^{-1})}$ . Dagli esempi precedenti sappiamo che:

$$\begin{aligned}a^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-az^{-1}}, & |z| > a \\ b^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-bz^{-1}}, & |z| > b,\end{aligned}$$

da cui:

$$x(n) = a^n u(n) - b^n u(n).$$

**Esempio 7.2.4.**

Si consideri di nuovo la trasformata  $z$ ,  $X(z)$ , dell'esempio precedente, ma questa volta con associata la regione di convergenza descritta dalla corona  $a < |z| < b$ . Dalla decomposizione in frazioni parziali di  $X(z)$  ora si ottengono le seguenti coppie trasformata-antitrasformata:

$$\begin{aligned} a^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}, & |z| > a \\ b^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, & |z| < b. \end{aligned}$$

Sempre in riferimento agli Esempi 7.2.1 e 7.2.2, antitrasformando si ricava la sequenza:

$$x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n - 1).$$

Si supponga infine che ad  $X(z)$  sia associata la regione di convergenza interna la cerchio di raggio  $a$ , cioè  $|z| < a$ . In questo caso le coppie trasformata-antitrasformata sono:

$$\begin{aligned} a^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}, & |z| < a \\ b^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, & |z| < b, \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$x(n) = -a^n u(-n - 1) + b^n u(-n - 1)$$

**7.2.1 Proprietà della Trasformata Zeta**

La trasformata zeta di un segnale a tempo discreto  $x(n)$  è la funzione  $X(z)$  a variabile complessa tale che:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}.$$

La trasformata zeta  $X(z)$  del segnale  $x(n)$  ha come dominio di esistenza, che indichiamo con  $R_X$ , la *regione di convergenza* (ROC) della serie  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$ . Ad esempio, indicando con  $\delta(n)$  e  $u(n)$  rispettivamente l'impulso e il gradino unitari, alcune note trasformate e relativa regione di convergenza sono date in Tabella 7.1.

La trasformata zeta possiede un certo numero di proprietà che la rendono uno strumento flessibile ed efficace per lo studio dei segnali a tempo discreto. Le principali proprietà sono presentate in Tabella 7.2.

La linearità è provata come segue:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (ax(n) + by(n))z^{-n} = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} = aX(z) + bY(z).$$

Per quanto riguarda la proprietà di traslazione, si consideri  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - a)z^{-n}$ ; ponendo  $k = n - a$ , quindi  $n = a + k$ , si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - a)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-a-k} = z^{-a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} = z^{-a} X(z).$$

**Tabella 7.1** Alcune coppie note segnale-trasformata  $z$  e relativa regione di convergenza (ROC).

Segnale	Trasformata $z$	ROC
$\delta(n)$	1	$z \in \mathbb{C}$
$\delta(n - m)$	$z^{-m}$	$z \in \mathbb{C}$ eccetto $\begin{cases} 0 & \text{se } m > 0 \\ +\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $
$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $
$-na^n u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$\cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $
$a^n \sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{az^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $

Proviamo infine la proprietà di convoluzione:

$$\begin{aligned} X(z)Y(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} y(j)z^{-j} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x(k)y(j)z^{-k-j} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n} \sum_{k+j=n} x(k)y(j) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k) \right) z^{-n}. \end{aligned}$$

Applicando le proprietà presentate in Tabella 7.2 alle coppie di trasformate elencate in Tabella 7.1 è possibile determinare le trasformate zeta di una vasta classe di segnali, comprendenti tutti quelli di interesse pratico trattati in questo testo.

#### Esempio 7.2.5.

Determinare le trasformate  $z$  dei segnali  $2^{-n}u(n) + u(n - 3)$ ,  $n2^{-n}u(n)$ ,  $\cos(3n)u(n)$ .

Tabella 7.2 Proprietà della trasformata z e relativa regione di convergenza (ROC).

Proprietà	$x(n)$	$\leftrightarrow$	$X(z)$	ROC
Linearità	$ax(n) + by(n)$		$aX(z) + bY(z)$	$R_X \cap R_Y$
Traslazione	$x(n - n_0)$		$z^{-n_0}X(z)$	$R_X$
Scalatura (dominio z)	$a^n x(n)$		$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$ a R_X$
Convoluzione	$x(n) * y(n)$		$X(z)Y(z)$	$R_X \cap R_Y$
Differenziazione (dominio z)	$nx(n)$		$-z \frac{d}{dz} X(z)$	$R_X$

$2^{-n}u(n) + u(n - 3)$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{1 - (2z)^{-1}}$	da Tabella 7.1
$u(n)$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	da Tabella 7.1
$u(n - 3)$	$\leftrightarrow$	$\frac{z^{-3}}{1 - z^{-1}}$	Prop. di traslaz.
$2^{-n}u(n) + u(n - 3)$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-3}}{1 - z^{-1}}$	Prop. di linear.
$n2^{-n}u(n)$	$\leftrightarrow$	$\frac{-(2z)^{-1}}{1 - (2z)^{-2}}$	Prop. di differ.
$e^{i3n}u(n)$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{1 - e^{3i}z^{-1}}$	da Tabella 7.1
$e^{-i3n}u(n)$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{1 - e^{-3i}z^{-1}}$	da Tabella 7.1
$\cos(3n)u(n) = \frac{1}{2}(e^{i3n} + e^{-i3n})u(n)$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{3i}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-3i}z^{-1}}\right)$	Prop. di linear.

Per quanto riguarda il calcolo dell'antitrasformata, che permette la ricostruzione di un segnale a partire dalla sua trasformata zeta, consideriamo qui, per il suo interesse nelle applicazioni ai segnali, il caso in cui la trasformata zeta è una funzione razionale e il dominio di esistenza contiene  $\infty$ .

Data una funzione razionale  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  dove  $P(z)$  e  $Q(z)$  sono polinomi, per la determinazione del segnale la cui trasformata zeta è  $R(z)$  si procede come segue:

1. si pone  $s = z^{-1}$  (quindi  $z = s^{-1}$ ), ottenendo una nuova funzione razionale  $R(s^{-1}) = \frac{U(s)}{W(s)}$  dove  $U(s)$  e  $W(s)$  sono due nuovi polinomi;
2. si sviluppa  $R(s^{-1})$  in frazioni parziali ottenendo, se gli zeri di sono semplici,  $R(s^{-1}) = \sum_k \frac{A_k}{s - b_k}$  o equivalentemente  $R(z) = \sum_k \frac{-A_k}{b_k} \frac{1}{1 - \frac{1}{b_k}z^{-1}}$ .
3. da Tabella 7.1 e per la linearità, si ha:

$$R(z) \longleftrightarrow -\sum_k \frac{A_k}{b_k} \frac{1}{b_k^n} u(n).$$

**Esempio 7.2.6.**

Determinare il segnale la cui trasformata è  $R(z) = \frac{z^2}{1-3z+2z^2}$  e la cui regione di convergenza contiene  $\infty$ .

Posto  $s = z^{-1}$  si ha  $R(s^{-1}) = \frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$ , sviluppando in frazioni parziali.

Questo significa:  $R(z) = -\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ .

Per la linearità e da Tabella 7.1 si conclude:

$$R(z) \longleftrightarrow u(n) - \frac{1}{2^{n+1}}u(n).$$

Gli esempi precedenti illustrano la procedura base per determinare la trasformata  $z$  inversa di una funzione razionale data la corona di convergenza. In generale, consideriamo una funzione razionale  $R(z)$  che ammette come poli  $z_1, \dots, z_m$  con  $|z_1| < |z_2| < \dots < |z_m|$ . Poiché ogni possibile corona di convergenza non può contenere poli, avremo le seguenti  $m+1$  corone di convergenza:

$$C_1 = \{z : |z| < |z_1|\}, \dots, C_k = \{z : |z_k| < |z| < |z_{k+1}|\}, \dots, C_{m+1} = \{z : |z_m| < |z|\}.$$

La sequenza  $x_k(n)$  che ammette come trasformata  $z$  la funzione  $X(z)$  definita sulla corona  $C_k$ , può essere ottenuta come segue:

$$x_k(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_k} X(z)z^{n-1}dz,$$

dove  $L_k$  è un cammino chiuso contenuto in  $C_k$ . Espandendo  $X(z)$  in frazioni parziali in  $z^{-1}$  si ottiene:

$$X(z) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}},$$

pertanto:

$$x_k(n) = \oint_{L_k} X(z)z^{n-1}dz = \sum_{j=1}^m \oint_{L_k} \frac{A_j}{1 - z_j z^{-1}} z^{n-1}dz = \sum_{j=1}^k A_j z_j^n u(n).$$

### 7.3 Analisi di Sistemi LTI a Tempo Discreto: Stabilità e Causalità

Sia dato un sistema LTI  $S$  a tempo discreto; sappiamo dal Capitolo 1 che l'uscita  $y(n)$  del sistema  $S$  avente come ingresso il segnale  $x(n)$  è ottenuto dalla convoluzione di  $x(n)$  con  $h(n)$ , dove  $h(n)$  è la risposta del sistema all'impulso unitario  $\delta(n)$ :

$$y(n) = h(n) * x(n).$$

Dalla proprietà di convoluzione (riportata in Tabella 7.2) si ottiene che:

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

dove  $Y(z)$ ,  $H(z)$  e  $X(z)$  sono rispettivamente la trasformata  $z$  di  $y(n)$ ,  $h(n)$  e  $x(n)$ . Riassumendo si ha quindi l'importante risultato:

**Fatto 7.1.** Dato un sistema LTI la cui risposta all'impulso è  $h(n)$ , detta  $Y(z)$ ,  $X(z)$  e  $H(z)$  rispettivamente la trasformata  $z$  dell'uscita  $y(n)$ , dell'ingresso  $x(n)$  e della risposta all'impulso  $h(n)$ , allora:

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

La funzione  $H(z)$  è chiamata funzione di trasferimento del sistema.

Questo risultato è illustrato in Figura 7.5.

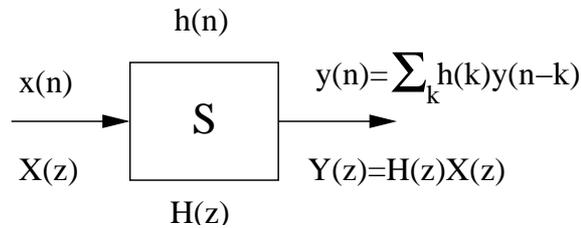


Figura 7.5 Funzione di trasferimento del sistema S.

Studiamo ora le caratteristiche della funzione di trasferimento di un sistema LTI quando questo risulta essere causale e/o stabile.

Ricordiamo che un sistema LTI è causale se, detta  $h(n)$  la risposta del sistema all'impulso unitario, risulta che  $h(n) = 0$  quando  $n < 0$ ; ne segue che:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n}.$$

Poichè nella serie di potenze precedente non appaiono potenze di  $z$  con esponente positivo, la regione di convergenza include  $z = \infty$ . Riassumendo, abbiamo il seguente

**Fatto 7.2.** La regione di convergenza della funzione di trasferimento  $H(z)$  di un sistema LTI causale è la regione esterna al cerchio con centro nell'origine e la cui circonferenza passa per il polo di  $H(z)$  più lontano dall'origine.

Si osservi che la causalità definisce univocamente la funzione di trasferimento e la sua regione di convergenza; si osservi inoltre che per funzioni di trasferimento del tipo  $H(z) = z^m$ , con  $m > 0$  il polo più lontano dall'origine è  $z = \infty$ .

### Esempio 7.3.1.

La funzione  $X(z)$  riportata nell'Esempio 7.2.3 rappresenta la funzione di trasferimento di un sistema causale se e solo se è associata alla regione di convergenza  $|z| > a$ , essendo  $a$  il polo di modulo massimo. Infatti, in questo caso la sua antitrasformata  $x(n)$  risulta nulla per  $n < 0$  essendo:

$$x(n) = (a^n - b^n) u(n).$$

Viceversa, la stessa funzione associata alla regione di convergenza descritta dalla corona  $b < |z| < a$ , come mostrato nell'Esempio 7.2.4, non può essere la funzione di trasferimento di un sistema causale poichè la sua antitrasformata  $x(n)$  vale per  $x(n) = b^n$   $n < 0$  essendo:

$$x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n - 1).$$

Lo stesso vale per la regione di convergenza della funzione data nell'Esempio 7.2.

Come discusso nel Capitolo 1, un sistema è stabile (BIBO) se la sua risposta a un ingresso limitato risulta a sua volta limitata.

Una caratterizzazione dei sistemi LTI stabili è stata data in termini di assoluta sommabilità della risposta  $h(n)$  all'impulso, mostrando che il sistema è stabile se e solo se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$ .

Osservando ora che quando  $|z| = 1$  si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)z^{-n}|,$$

si può concludere che per  $|z| = 1$  la serie  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$  è assolutamente convergente quindi convergente. Allora per  $|z| = 1$  la trasformata  $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$  è definita.

**Fatto 7.3.** *Un sistema LTI è stabile se la regione di convergenza della funzione di trasferimento  $H(z)$  contiene la circonferenza di raggio unitario,  $|z| = 1$ .*

#### Esempio 7.3.2.

L'integratore numerico presentato nell'Esempio 1.3.4 ha funzione di trasferimento  $\frac{1}{1-z^{-1}}$ . Essa ha un polo per  $z = 1$  quindi l'integratore non è un sistema stabile.

Riassumendo, le condizioni di causalità e di stabilità per il caso in cui la funzione di trasferimento di un sistema LTI è razionale, portano al seguente importante:

**Fatto 7.4.** *Un sistema LTI è causale e stabile se tutti i poli della sua funzione di trasferimento cadono all'interno del cerchio unitario  $|z| = 1$ , cioè quando essi hanno tutti modulo minore di 1.*

#### Esempio 7.3.3.

La funzione  $H(z) = \frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)}$  è la funzione di trasferimento di un sistema contemporaneamente causale e stabile se e solo se  $\max\{|a|, |b|\} < 1$ . Infatti i poli di  $H(z)$  sono  $z = a$  e  $z = b$ ; essi stanno all'interno del cerchio di raggio 1 se e solo se  $|a| < 1$  e  $|b| < 1$ .

## 7.4 Trasformata Zeta e Trasformata di Fourier a Tempo Discreto

La trasformata di Fourier a tempo discreto di un segnale  $x(n)$  introdotta in Sezione 5.2 è:

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i\omega n}.$$

in cui utilizziamo la variabile  $\omega$  per denotare la frequenza di normalizzata alla frequenza di campionamento.

Poichè la trasformata zeta di  $x(n)$  è:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-z}.$$

Possiamo allora concludere:

**Fatto 7.5.** La trasformata di Fourier a tempo discreto  $X_d(\omega)$  del segnale  $x(n)$

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d(n)e^{-i\Omega n}, \quad x_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_d(\Omega)e^{i\Omega n} d\Omega.$$

### 7.4.1 Risposta in Frequenza di Filtri Lineari a Tempo Discreto

In questa sezione mostriamo la caratterizzazione dei sistemi LTI nel dominio delle frequenze. Questo obiettivo è ottenuto sollecitando il sistema con funzioni esponenziali complesse (o sinusoidali) da cui origina il comportamento caratteristico del sistema descritto dalla funzione della variabile complessa  $\omega$ , chiamata funzione *risposta in frequenza* del sistema. Il termine risposta in frequenza deriva dal fatto che essa risulta essere la trasformata di Fourier della risposta all'impulso  $h(n)$ . Questa funzione è di fondamentale importanza perché non si limita a descrivere il comportamento del sistema a fronte di singoli esponenziali complessi, ma anche a fronte di combinazioni lineari degli stessi che, come visto nelle trattazione esposta nel capitolo precedente, permettono di sintetizzare segnali aperiodici a tempo discreto del tutto generali.

Supponiamo di operare con sistemi LTI cui si applicano segnali a tempo discreto ottenuti per campionamento con passo  $\tau$  o equivalentemente con frequenza di campionamento  $\nu_s = 1/\tau$ . Obiettivo di questa sezione è studiare la risposta di un sistema LTI a ingressi sinusoidali di frequenza multipla di  $\omega$  (rad/sec) del tipo  $e^{i\omega\tau n}$ . Per semplicità, porremo  $\tau = 1$ , giacché i risultati ottenuti si adattano facilmente al caso generale e interpretiamo  $\omega$  come frequenza normalizzata alla frequenza di campionamento  $\nu_s$  Hz; con queste scelte la frequenza  $\omega$  risulta confinata nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

Sia  $h(n)$  la risposta del sistema all'impulso unitario  $\delta(n)$ ; la risposta  $y(n)$  del sistema al segnale d'ingresso  $x(n) = e^{i\omega n}$  è la convoluzione di  $h(n)$  ed  $e^{i\omega n}$ , cioè:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-i\omega k}.$$

Ricordando che  $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$  è la trasformata  $z$  di  $h(n)$ , si definisce

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-i\omega k}$$

e viene chiamata *risposta in frequenza* del sistema LTI. Secondo quanto mostrato, la risposta del sistema all'esponenziale complesso risulta:

$$y(n) = e^{i\omega n} H(e^{i\omega}),$$

data dunque dal segnale esponenziale di uguale frequenza, alterato dal fattore  $H(e^{i\omega})$ . Dal punto di vista sistemistico, le funzioni esponenziali complesse vengono anche dette autofunzioni del sistema: funzioni per le quali il sistema produce un'uscita che differisce dall'ingresso di un fattore moltiplicativo costante, detto autovalore del sistema.

Quanto scitto ci porta ad asserire:

**Teorema 7.1.** La risposta di un sistema LTI a segnali sinusoidali di tipo  $e^{i\omega n}$  è completamente descritta dalla sua risposta in frequenza  $H(e^{i\omega})$ , cioè dalla funzione di trasferimento valutata sulla circonferenza unitaria. In particolare:

- $|H(e^{i\omega})|$  è il guadagno della risposta sul segnale  $e^{i\omega n}$  di frequenza  $\omega$ ;
- $\angle H(e^{i\omega})$  è la variazione di fase della risposta rispetto a quella del segnale  $e^{i\omega n}$  di frequenza  $\omega$ .

**Esempio 7.4.1.**

Determinare l'uscita del sistema con risposta all'impulso

$$h(n) = (0.7)^n u(n)$$

quando l'ingresso è l'esponenziale complesso

$$x(n) = 2 e^{i\frac{\pi}{2}n}, \quad -\infty < n < +\infty.$$

Calcoliamo innanzitutto la risposta in frequenza del sistema (trasformata di Fourier del segnale  $h(n)$ ) a partire dalla funzione di trasferimento  $H(z)$ :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.7z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad H(e^{i\omega}) = \frac{1}{1 - 0.7e^{-i\omega}},$$

che valutata in  $\omega = \frac{\pi}{2}$  vale

$$H(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{1 + i0.7} = 0.8e^{-i36.87^\circ},$$

da cui ricaviamo l'uscita del sistema:

$$y(n) = 2 e^{i\frac{\pi}{2}n} H(e^{i\frac{\pi}{2}}) = 1.6 e^{i(\frac{\pi}{2}n - 36.87^\circ)}.$$

L'effetto finale è quello di scalare il modulo di 0.8 e di traslare la frequenza di  $36.87^\circ$ .

**Esempio 7.4.2.**

Determinare il guadagno della risposta in frequenza del sistema che ha la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) - x(n-1).$$

La risposta all'impulso di questo sistema è  $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$ . La funzione di trasferimento risulta dunque  $H(z) = 1 - z^{-1}$  e di conseguenza la risposta in frequenza è data da  $H(e^{i\omega}) = 1 - e^{-i\omega}$ . Il guadagno risulta infine:

$$|H(e^{i\omega})|^2 = (1 - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega = 4 \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

ed è mostrato in Figura 7.6.

Dal grafico della funzione guadagno si evince che questo sistema si comporta come un filtro passa-alto, che inibisce le componenti a bassa frequenza ( $\omega \approx 0$ ) e lascia passare quelle ad alta frequenza ( $\omega \approx \pi$ ).

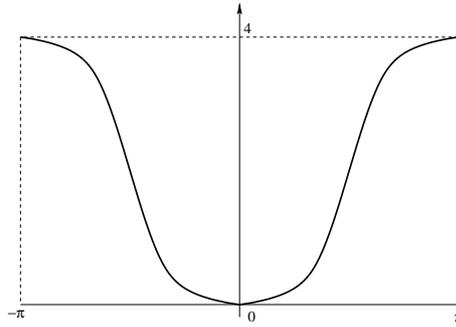


Figura 7.6 Guadagno del filtro passa-alto con funzione di trasferimento  $1 - z^{-1}$ .

## 7.4.2 Risposta in Frequenza nel Caso di Funzioni di Trasferimento Razionali

Studiamo ora come determinare la risposta all'impulso di un sistema, conoscendone la risposta in frequenza. A tal riguardo, si osserva che la risposta in frequenza  $H(e^{i\omega})$  è la trasformata di Fourier a tempo discreto della risposta all'impulso  $h(n)$ , studiata in Sezione 5.2. La risposta all'impulso può essere ottenuta determinando i coefficienti della serie di Fourier  $H(e^{i\omega})$ :

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-ik\omega}, \quad h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{i\omega})e^{ik\omega} d\omega.$$

### Esempio 7.4.3.

Determinare la risposta all'impulso  $h(k)$  di un filtro passa basso ideale di frequenza di taglio  $\pi/2$  e fase 0. Per ipotesi, la risposta in frequenza  $H(e^{i\omega})$  del sistema è:

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Ne segue:

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{i\omega})e^{ik\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{ik\omega} d\omega = \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi}$$

Si osserva che il filtro non è causale né stabile.

Supponiamo ora che la funzione  $H(z)$  di trasferimento del filtro sia razionale. Se il filtro è causale e stabile, sappiamo che i poli di  $H(z)$  sono tutti contenuti nel cerchio unitario.

Il modulo della risposta in frequenza  $G(\omega) = |H(e^{i\omega})|$  è una funzione non negativa e periodica di periodo  $2\pi$ . Alcune considerazioni geometriche possono essere utili per ottenere il comportamento qualitativo di  $G(\omega)$ . Cominciamo a rilevare che, essendo  $H(z)$  una funzione razionale in  $z^{-1}$ , possiamo esprimere il numeratore e il denominatore come prodotto di binomi di primo grado in  $z^{-1}$  ottenendo:

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^L (1 - b_k z^{-1})},$$

dove  $a_1, \dots, a_M$  sono gli zeri e  $b_1, \dots, b_L$  sono i poli di  $H(z)$ .

Vale:

$$G(\omega) = |A| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - a_k e^{-i\omega}|}{\prod_{k=1}^L |1 - b_k e^{-i\omega}|}.$$

Possiamo allora osservare:

- se  $a \approx 0$ , allora  $|1 - ae^{-i\omega}| \approx 1$ : poli o zeri vicini all'origine non portano nessun rilevante contributo a  $G(\omega)$ ;
- se lo zero  $a_k$  è "vicino" alla circonferenza unitaria, cioè  $a_k \approx e^{-i\omega_k}$  per un opportuno  $\omega_k$ , allora  $|1 - a_k e^{-i\omega_k}| \approx 0$  e quindi  $G(\omega_k) \approx 0$ : per frequenze corrispondenti a zeri "vicini" alla circonferenza unitaria, la funzione  $G(\omega)$  è vicina a zero.

In Figura 7.7 sono rappresentati con una crocetta i poli e con un cerchietto gli zeri di una funzione razionale  $H(z)$ ; nella stessa figura si mostra il modulo della risposta in frequenza del filtro con funzione di trasferimento  $H(z)$ .

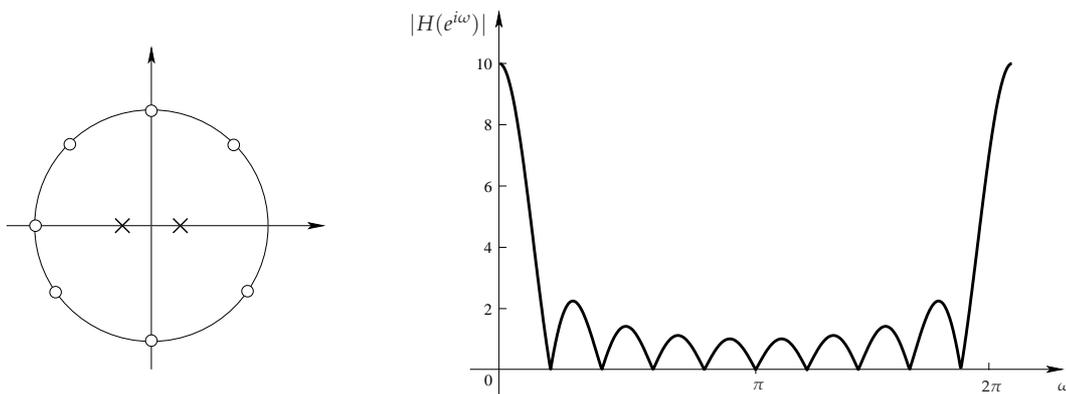


Figura 7.7 Effetto dei poli e degli zeri sul modulo della risposta in frequenza.

Per quanto riguarda la fase, si osserva che:

$$\angle H(e^{-i\omega}) = \sum_{k=1}^M \angle(1 - a_k e^{-i\omega}) - \sum_{k=1}^L \angle(1 - b_k e^{-i\omega}).$$

Essa può quindi essere ottenuta considerando separatamente i contributi  $\angle(1 - ae^{-i\omega})$  per ogni polo o zero  $a$ , sommando i contributi dovuti agli zeri e sottraendo i contributi dovuti ai poli.

## 7.5 Sistemi in Multifrequenza: Decimazione e Interpolazione

I moderni sistemi digitali possono processare i dati a più di una frequenza di campionamento. Alcuni esempi sono stati discussi in Sezione 4.3.1, dove vengono esplorati i vantaggi ottenibili dal sovracampionamento. Le due operazioni base che permettono di modificare

digitalmente le frequenze sono la *decimazione* e l'*interpolazione*: l'interpolazione aumenta la frequenza di campionamento, la decimazione la riduce, comprimendo di fatto i dati. Naturalmente questi obiettivi devono essere ottenuti senza introdurre effetti indesiderati, come errori di quantizzazione o aliasing.

La decimazione  $\downarrow_M$  di un fattore  $M$  è ottenuta da un sistema con la seguente relazione ingresso-uscita:

$$M(x(n)) = x(Mn).$$

In Figura 7.8 è rappresentato la relazione ingresso-uscita per la decimazione con  $M = 3$ .

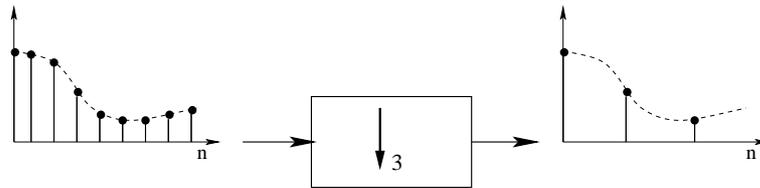


Figura 7.8 Operazione di decimazione.

Tale sistema è chiaramente lineare, ma non tempo invariante: vogliamo qui studiarne la risposta in frequenza. A tal riguardo, siano  $X(z)$  e  $Y(z)$  le trasformate zeta rispettivamente dell'ingresso  $x(n)$  e dell'uscita  $y(n) = x(Mn)$ ; le funzioni  $F(\omega) = X(e^{i\omega})$  e  $G(\omega) = Y(e^{i\omega})$ , periodiche di periodo  $2\pi$ , descrivono lo spettro di frequenza di  $x(n)$  e  $y(n)$ . La relazione tra  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$  è stabilita nel seguente:

**Fatto 7.6.** Se  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$  sono lo spettro di frequenza di segnali rispettivamente in ingresso e uscita all'operazione di decimazione con fattore  $M$ , vale:

$$G(\omega) = \frac{1}{M} \left( F(\omega) + F\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right) + \dots + F\left(\omega - \frac{2(M-1)\pi}{M}\right) \right).$$

Osserviamo che la funzione  $G(\omega)$  è periodica di periodo  $2\pi M$ : se  $F_s$  è la frequenza di campionamento del segnale di ingresso, la frequenza del segnale di uscita risulta  $\frac{F_s}{M}$ . Osserviamo inoltre che il segnale di ingresso può essere perfettamente ricostruito dal segnale di uscita se si evita il fenomeno dell'aliasing, e cioè se il limite di banda del segnale di ingresso è  $\frac{\pi}{M}$ . Se quindi desideriamo che l'operazione di decimazione non crei perdita di informazione rispetto al segnale di ingresso, tale operazione dovrà essere preceduta da un filtro passa-basso, con frequenza di taglio  $\frac{\pi}{M}$ . In Figura 7.9 viene mostrato il sistema Decimatore, composto da un filtro anti-aliasing e dall'operazione di decimazione.

L'interpolazione di segnali digitali ha forti similitudini con la conversione digitale-analogica: in questo caso, tuttavia, il segnale di uscita continua ad essere digitale, anche se "campionato" a frequenza più alta. Più precisamente, un interpolatore con fattore  $L$  trasforma un segnale campionato con frequenza  $F_s$  in uno campionato con frequenza  $LF_s$ . In Figura 7.10 è rappresentato un sistema Interpolatore (con fattore 3).

Esso è costituito da un'operazione di interpolazione  $\uparrow_L$  che inserisce, tra  $x(n)$  e  $x(n+1)$ ,  $L-1$  campioni a valore 0. Il nuovo segnale viene poi filtrato con un filtro digitale passa-basso a frequenza di taglio  $\frac{F_s}{2L}$ , dove  $F_s$  è la frequenza di campionamento di  $x(n)$ . Poiché l'inserzione di  $L-1$  zeri "distribuisce" l'energia di un campione su  $L$  campioni, l'uscita

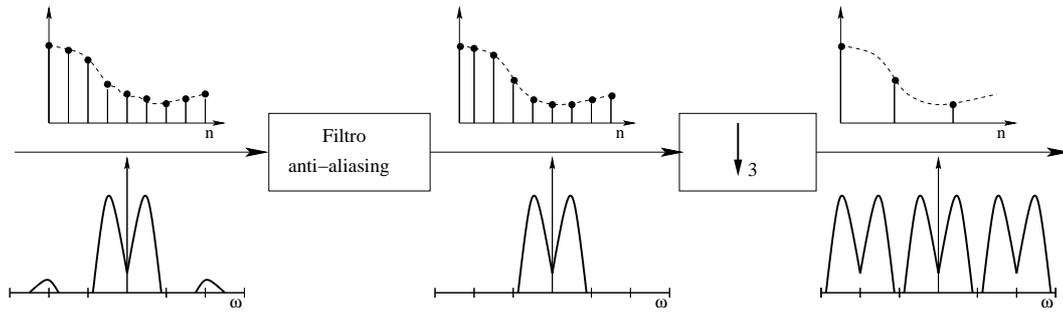


Figura 7.9 Sistema Decimatore.

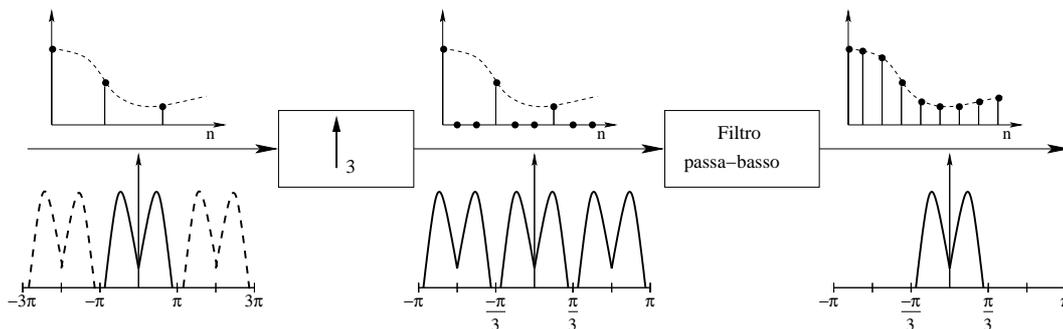


Figura 7.10 Sistema Interpolatore.

$y(n)$  risulta attenuata di un fattore  $\frac{1}{L}$ : questo fatto può essere compensato moltiplicando per  $L$  il valore dell'uscita.

Come è ben evidenziato dalla rappresentazione in frequenza, il Decimatore e l'Interpolatore rappresentano sistemi l'uno inverso dell'altro.

#### Esempio 7.5.1.

Conversione di frequenze per fattori non interi.

Determinare un sistema che permette di trasferire il contenuto di un CD a 44.1 kHz su un nastro audio digitale a 48 kHz.

Una possibile soluzione è data dalla composizione sequenziale di un interpolatore a fattore  $L$  con un decimatore a fattore  $M$ , tale che  $\frac{L}{M} = \frac{48}{44.1}$ . Poiché  $\frac{48}{44.1} = \frac{160}{147}$  si può porre  $L = 160$  e  $M = 147$ : per prima cosa la frequenza di campionamento dei dati su CD è interpolata con  $L = 160$  ottenendo una frequenza di 7056 kHz, poi ridotta con  $M = 147$  a 48 kHz.

È utile osservare che l'interpolatore deve precedere il decimatore, altrimenti il processo di decimazione rimuove alcune componenti in frequenza.



## FILTRI DIGITALI FIR E IIR

I filtri digitali che studiamo in questo capitolo sono particolari sistemi LTI causali a tempo discreto. Essi possono essere implementati e simulati su macchine digitali (microprocessori o processori specializzati come i DSP); per molti anni addirittura essi sono risultati la più comune applicazione dei DSP.

Il vantaggio sui filtri analogici è duplice:

- essi possono essere riprogrammati via software sullo stesso hardware;
- è possibile modificare in tempo reale i coefficienti dei filtri, ottenendo in tal modo filtri “adattativi”.

I principali tipi di filtri digitali sono i filtri *FIR* (*Finite Impulse Response*) e *IIR* (*Infinite Impulse Response*). Tecnicamente, un filtro FIR è un sistema LTI causale con risposta finita all’impulso; la funzione di trasferimento di un filtro FIR risulta essere un polinomio in  $z^{-1}$ . Con filtri IIR invece, intendiamo quella sottoclasse dei sistemi LTI causali con risposta anche infinita all’impulso, dotati di una funzione di trasferimento razionale in  $z^{-1}$ .

Nelle applicazioni pratiche, il filtro FIR è da preferire quello IIR dove vi sia richiesta di fase lineare, altrimenti, se la distorsione in fase è tollerabile, si preferisce l’uso di filtri IIR perché comportano un minor numero di parametri, meno memoria e minor complessità computazionale.

Nel primo paragrafo si introducono le definizioni di filtri FIR e IIR, discutendone vantaggi e svantaggi:

- un filtro FIR è sempre stabile e può avere fase lineare;
- un filtro IIR può essere instabile e non ha in generale fase lineare; essi possono tuttavia avere alcune caratteristiche (banda di transizione, attenuazione) migliori rispetto a quelle dei filtri FIR.

Si discute poi la realizzazione di filtri mediante reti i cui elementi costitutivi sono operatori di somma, moltiplicazione per costante e ritardo temporale. Il progetto di queste reti è agevolato da proprietà composizionali quali:

- la funzione di trasferimento del sistema ottenuto dalla “cascata” di due reti è il prodotto delle funzioni di trasferimento dei sistemi realizzati dalle singole reti;
- la funzione di trasferimento del sistema ottenuto dalla “somma” di due reti è la somma delle funzioni di trasferimento dei sistemi realizzati dalle singole reti.

Nel quarto paragrafo vengono introdotte alcune tecniche di progetto di filtri digitali. Vengono analizzati i principali parametri utilizzati nella progettazione aiutata da strumenti CAD; si mostra poi una semplice tecnica di realizzazione di filtri digitali IIR a partire da quelli analogici e si discute in dettaglio la tecnica di progetto di filtri FIR col metodo delle “finestre”.

Il capitolo si conclude con un cenno ai principali tipi di rumore introdotto dal fatto che segnali e sistemi inerentemente analogici vengono trattati con tecniche digitali. In particolare, viene discusso il rumore prodotto dalla quantizzazione del segnale, quello dovuto alla quantizzazione dei coefficienti e quello causato dai troncamenti nel calcolo digitale.

## 8.1 Filtri FIR e IIR Causali

La causalità, sinonimo di realizzabilità, ha implicazioni importanti sul comportamento in frequenza del filtro che meritano di essere discusse brevemente.

Il progetto di filtri FIR e IIR causali consiste nel determinarne i coefficienti mediante specifiche formulate normalmente nel dominio delle frequenze, espresse in termini di ampiezza e fase della risposta del filtro desiderata. Questa attitudine non garantisce tuttavia che una determinata risposta in frequenza produca una risposta all’impulso causale. Sebbene non vi sia una soluzione generale al problema, si possono individuare condizioni necessarie o almeno sufficienti ponendo restrizioni sulla risposta in frequenza.

Paley e Wiener (1934) hanno dimostrato che, se una sequenza  $h(n)$  è nulla per  $n < 0$  e ha energia finita, cioè  $\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)|^2 < +\infty$ , allora la sua trasformata di Fourier verifica:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln |H(e^{i\omega})|| d\omega < +\infty.$$

Viceversa, se  $|H(e^{i\omega})|$  è quadrato integrabile, cioè

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{i\omega})|^2 d\omega < +\infty$$

e se la condizione di Paley-Wiener è rispettata, allora è sempre possibile associare al modulo di  $H(e^{i\omega})$  una risposta in fase  $\Phi(\omega)$  in modo tale che il filtro con risposta in frequenza

$$H(e^{i\omega}) = |H(e^{i\omega})| e^{i\Phi(\omega)}$$

sia causale. Un'importante conseguenza di questo risultato è che un filtro causale ha un risposta in frequenza che non può essere nulla su una banda finita, il che conferma la non causalità del filtro ideale.

In aggiunta alla suddetta condizione, la causalità impone anche una relazione forte tra la parte reale  $H_R(e^{i\omega})$  e la parte immaginaria  $H_I(e^{i\omega})$  di  $H(e^{i\omega})$ . La spiegazione deriva dalla decomposizione della sequenza  $h(n)$  in due sequenze: una pari  $h_p(n)$  e una dispari  $h_d(n)$ , definite come segue:

$$h_p(n) = \frac{1}{2}[h(n) + h(-n)], \quad h_d(n) = \frac{1}{2}[h(n) - h(-n)].$$

È indubbio che un segnale  $h(n)$ , nullo per  $n < 0$ , coincide con la sequenza pari  $h_p(n)$  associata o alla sequenza dispari  $h_d(n)$  associata più  $h(0)$ . Ne consegue che le due sequenze, quella pari e quella dispari associate a  $h(n)$ , non sono tra loro indipendenti.

Poiché si può mostrare che le trasformate di  $h_p(n)$  e  $h_d(n)$  risultano essere rispettivamente:

$$h_p(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} H_R(e^{i\omega}), \quad h_d(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} H_I(e^{i\omega})$$

si deduce che sussiste una relazione di interdipendenza anche tra le due trasformate  $H_R(e^{i\omega})$  e  $H_I(e^{i\omega})$ .

Riassumendo, la causalità ha importanti implicazioni sul progetto e la realizzazione di filtri digitali:

- la risposta in frequenza  $H(e^{i\omega})$  non può essere zero eccetto che in un insieme finito di punti;
- l'ampiezza  $|H(e^{i\omega})|$  della risposta in frequenza non può essere costante su una banda finita di frequenze; le bande passante e proibita presentano oscillazioni che non possono essere eliminate a causa del troncamento operato su  $h(n)$  (fenomeno di Gibbs);
- la parte reale  $H_R(e^{i\omega})$  e la parte immaginaria  $H_I(e^{i\omega})$  di  $H(e^{i\omega})$  sono tra loro interdipendenti, di conseguenza il modulo  $|H(e^{i\omega})|$  e la fase  $\Phi(e^{i\omega})$  di  $H(e^{i\omega})$  non possono essere scelti arbitrariamente.

### 8.1.1 Filtri FIR e Filtri a Fase Lineare

Richiamiamo che un sistema LTI causale a tempo discreto è detto filtro FIR se la risposta  $h(n)$  all'impulso unitario è finita nel senso che  $h(n) = 0$  per  $n < 0$  e per  $n \geq M$  per un opportuno  $M > 0$ . Il rapporto ingresso-uscita è allora descritto dalla seguente equazione alle differenze finite:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k). \quad (8.1)$$

Passando alle trasformate  $z$  e applicando la proprietà della traslazione temporale, si ottiene:

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

dove  $H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)z^{-k}$  e  $X(z)$ ,  $Y(z)$  sono le trasformate  $z$  rispettivamente di  $x(n)$  e  $y(n)$ . Si osservi che  $H(z)$  è un polinomio in  $z^{-1}$ .

Le caratteristiche più interessanti dei filtri FIR sono le seguenti:

1. Un filtro FIR è sempre causale e stabile; ciò può essere rilevato dal fatto che  $H(z)$  è un polinomio in  $z^{-1}$ , e quindi ha un solo polo in  $z = 0$ , di fatto interno alla cerchio di raggio 1.
2. Un filtro FIR può avere fase lineare: se la funzione  $h(n)$  è simmetrica o antisimmetrica rispetto a  $(M-1)/2$  (cioè  $h(k) = h(M-1-k)$  oppure  $h(k) = -h(M-1-k)$ ), allora la fase  $\angle H(e^{i\omega})$  è lineare.

Infatti, se  $h(k) = h(M-1-k)$ :

$$\begin{aligned} H(e^{i\omega}) &= \sum_{k=0}^{M-1} h(k)e^{-ik\omega} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \frac{e^{-ik\omega} + e^{-i(M-1-k)\omega}}{2} \\ &= e^{-i\frac{M-1}{2}\omega} \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \frac{e^{i(\frac{M-1}{2}-k)\omega} + e^{-i(\frac{M-1}{2}-k)\omega}}{2} \\ &= e^{-i\frac{M-1}{2}\omega} \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \cos\left(\frac{M-1}{2} - k\right) \omega. \end{aligned}$$

Poichè  $\sum_{k=0}^{M-1} h(k) \cos\left(\frac{M-1}{2} - k\right) \omega$  è un numero reale, la fase risulta lineare:

$$\angle H(e^{i\omega}) = -\frac{M-1}{2}\omega.$$

Analogamente, se  $h(k) = -h(M-1-k)$ , si ottiene:

$$H(e^{i\omega}) = ie^{-i\frac{M-1}{2}\omega} \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \sin\left(\frac{M-1}{2} - k\right) \omega.$$

Osservando che  $i = e^{i\pi/2}$ , si ottiene:

$$\angle H(e^{i\omega}) = -\frac{M-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}.$$

In Figura 8.1 sono rappresentate le risposte all'impulso di due filtri FIR a fase lineare, uno antisimmetrico, l'altro simmetrico.

### 8.1.2 Filtri IIR

Consideriamo ora un sistema LTI in cui la relazione ingresso-uscita verifica la seguente equazione alle differenze finite:

$$\sum_{k=0}^{L-1} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k y(n-k) \quad (a_{L-1} \neq 0).$$

Osserviamo che se  $L = 1$  l'equazione precedente definisce un filtro FIR.

Se invece  $L > 1$ , l'equazione precedente non è in grado di specificare univocamente il sistema: passando infatti alle trasformate  $z$  e applicando la proprietà della traslazione temporale, si ottiene:

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

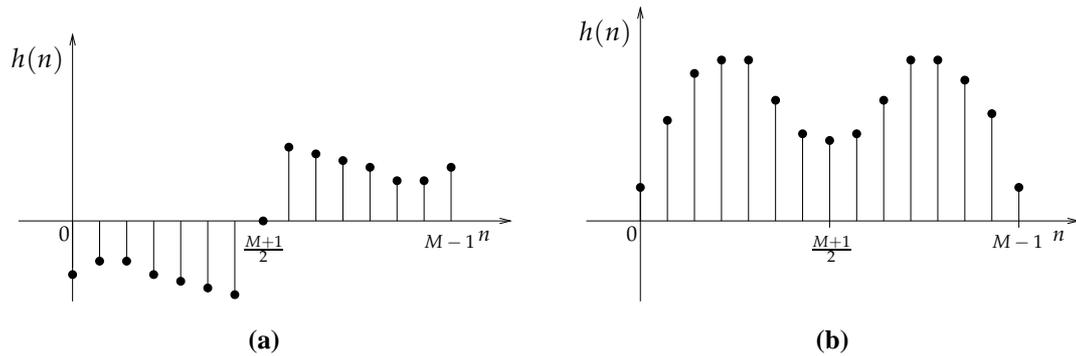


Figura 8.1 (a) Risposta all'impulso di un filtro a fase lineare antisimmetrico. (b) Risposta all'impulso di un filtro a fase lineare simmetrico.

dove  $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{L-1} a_k z^{-k}}$  e  $X(z)$ ,  $Y(z)$  sono le trasformate  $z$  rispettivamente di  $x(n)$  e  $y(n)$ . Poiché  $H(z)$  è una funzione razionale in  $z^{-1}$  dotata di poli distinti da 0, possiamo descrivere più sistemi caratterizzati dalla stessa funzione  $H(z)$  ma aventi diverse corone di convergenza. Solo uno di essi tuttavia, e cioè quello contenente  $\infty$ , è causale. Possiamo allora dare la seguente:

**Definizione 8.1.** Un filtro IIR è un sistema LTI causale tale che la relazione ingresso-uscita verifica l'equazione ricorsiva alle differenze finite:

$$\sum_{k=0}^{L-1} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k y(n-k) \quad (a_{L-1} \neq 0, L > 1).$$

Come abbiamo visto sopra, la funzione di trasferimento  $H(z)$  di un filtro IIR è  $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{L-1} a_k z^{-k}}$ ; la presenza di poli distinti da 0 comporta che, se il filtro è causale, la risposta  $h(n)$  all'impulso unitario è nulla per  $n < 0$ , ma risulta diversa da 0 per infiniti  $n$  positivi: la fase di questi filtri non può mai essere lineare.

#### Esempio 8.1.1.

Il filtro IIR descritto dall'equazione  $y(n) + ay(n-1) = x(n)$  ammette la funzione di trasferimento  $H(z) = \frac{1}{1+az^{-1}}$  e corona di convergenza  $|z| > |a|$ , poichè il polo è in  $z = -a$ . In tale regione vale che  $H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$ , quindi la risposta all'impulso unitario del filtro è:

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ a^n, & n \geq 0 \end{cases}.$$

La risposta all'impulso non è finita e il filtro è stabile solo se  $|a| < 1$ .

L'esempio precedente mostra che, contrariamente a quanto accade per filtri FIR, un filtro IIR può non essere stabile; ulteriormente, mentre esistono filtri FIR con fase lineare, la fase di un filtro IIR non è mai lineare.

Questi svantaggi sono compensati in vari casi dalla maggior semplicità realizzativa dei filtri IIR rispetto ai filtri FIR e dalle migliori caratteristiche di attenuazione a parità di ordine delle equazioni.

## 8.2 Applicazioni di Filtri FIR e IIR

### 8.2.1 Zeri di Filtri a Fase Lineare: i Filtri COMB

Un filtro FIR ha funzione di trasferimento del tipo

$$H(z) = \frac{P(z)}{z^M},$$

dove  $P(z)$  è un polinomio di grado  $M$  a coefficienti reali. A meno di una costante moltiplicativa, il filtro viene allora univocamente determinato dagli zeri di  $P(z)$ , cioè dalle soluzioni dell'equazione  $P(z) = 0$ .

Sia  $z_1$  una radice di  $P(z)$ ; essendo i coefficienti di  $P(z)$  reali, ricordiamo che o  $z_1$  è reale o  $z_1$  è complesso, ma allora il suo coniugato  $z_1^*$  è un'altra radice di  $P(z)$ .

Il seguente risultato caratterizza i filtri FIR con fase lineare, in termini dei loro zeri:

**Fatto 8.1.** *Sia dato un filtro FIR con funzione di trasferimento  $H(z) = \frac{P(z)}{z^M}$ . Allora le due seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. *il filtro ha fase lineare;*
2. *se  $re^{i\theta}$  è uno zero di  $P(z)$ , allora anche  $\frac{1}{r}e^{i\theta}$  è uno zero di  $P(z)$ .*

Ne segue in particolare che filtri i cui zeri sono tutti sulla circonferenza di raggio 1 hanno fase lineare. Un'importante famiglia di filtri che hanno gli zeri sulla circonferenza unitaria è quella dei filtri con funzione di trasferimento del tipo:

$$H(z) = \frac{1}{M}(1 - z^{-M}).$$

In questo caso, gli zeri del filtro sono esattamente le radici dell'unità  $z_k = e^{2\pi\frac{k}{M}}$  ( $k = 0, \dots, M-1$ ).

La fase di questi filtri è lineare per ogni  $M$ ; il guadagno per  $M = 8$ , è dato dal grafico in Figura 8.2.

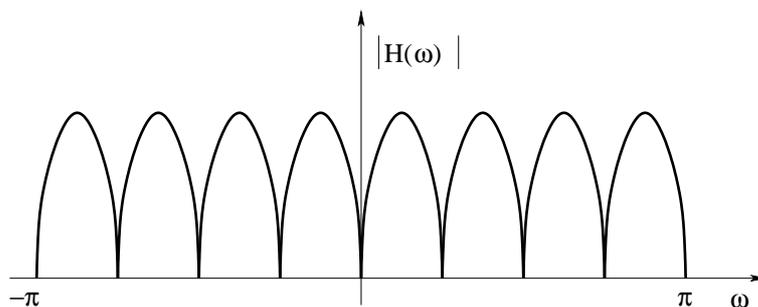


Figura 8.2 Guadagno di un filtro comb di ordine 8.

A causa della forma “a pettine” del grafico precedente, questi filtri sono detti *comb*. Essi sono implementabili in modo veramente efficiente: dette infatti  $X(z)$  e  $Y(z)$  le trasformate zeta dell'ingresso  $x(n)$  e  $y(n)$  dell'uscita, vale  $Y(z) = \frac{1}{M}(X(z) - z^{-M}X(z))$ . Questo implica

$$y(n) = \frac{1}{M}(x(n) - x(n - M)).$$

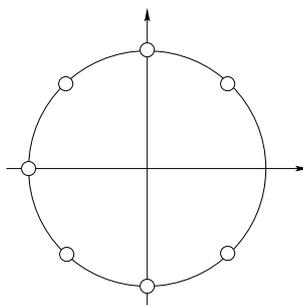


Figura 8.3 Zeri di un filtro comb passa-basso di ordine 8.

È possibile ottenere da un filtro comb da un filtro passa-basso semplicemente eliminando lo zero  $z_0 = 1$ . Nel caso di filtro comb di ordine 8, gli zeri sono mostrati in Figura 8.3.

La funzione di trasferimento del filtro passa-basso può essere ottenuta dividendo  $1 - z^{-M}$  per  $1 - z^{-1}$ , in modo da eliminare lo zero  $z_0 = 0$ . Il guadagno della risposta in frequenza, per  $M = 8$ , è dato in Figura 8.4.

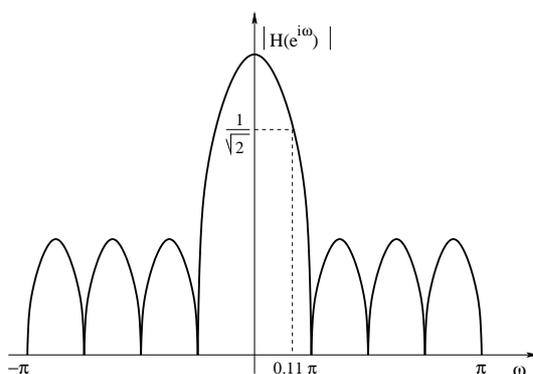


Figura 8.4 Guadagno di un filtro comb passa-basso di ordine 8.

La frequenza di taglio a 3dB, normalizzata, è  $0.11\pi$ ; le oscillazioni in banda proibita risultano piuttosto alte ( $\approx 0.3$ ).

La risposta del filtro può essere calcolata in due differenti modi.

1. Ricordando che  $\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-M+1}$ , si ottiene:

$$Y(z) = \frac{X(z) + z^{-1}X(z) + \dots + z^{-M+1}X(z)}{M}.$$

Nella rappresentazione in tempo, questo porta al seguente filtro FIR, riconoscibile come il consueto filtro a media mobile:

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + \dots + x(-M+1)}{M}.$$

2. Procedendo direttamente, da si ha:

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{1}{M}X(z)(1 - z^{-M}).$$

Nella rappresentazione in tempo, questo porta al seguente filtro IIR:

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{M}(x(n) - x(n-M)).$$

Nella realizzazione IIR, viene introdotto un polo in 1 che si sovrappone allo 0: poiché il polo è sulla circonferenza unitaria, il filtro risulta intrinsecamente instabile. Di conseguenza, l'algoritmo che dà la realizzazione IIR deve essere utilizzato solo su brevi intervalli di tempo.

I filtri comb passa-basso hanno prestazioni mediocri; tuttavia, essi sono veloci e di facile realizzazione. Considerando la frequenza di campionamento  $F_s$  Hz, la frequenza di taglio del filtro passa-basso comb di ordine 8 risulta  $0.11 \frac{F_s}{2}$ : per realizzare un filtro comb di data frequenza di taglio basta aggiornare in modo opportuno la frequenza di campionamento.

#### Esempio 8.2.1.

Si voglia progettare un filtro comb di ordine 8 con frequenza di taglio a 3dB pari a 500 Hz. Ponendo

$$0.11 \frac{F_s}{2} = 500$$

si ottiene  $F_s = 9091$  Hz: basta implementare il filtro comb di ordine 8 aggiustando la frequenza di campionamento per ADC e DAC a 9091 Hz.

## 8.2.2 Filtri Notch (a Intaglio)

I filtri notch hanno l'obiettivo di eliminare una stretta banda di frequenza: il guadagno della risposta in frequenza deve allora essere del tipo in Figura 8.5.

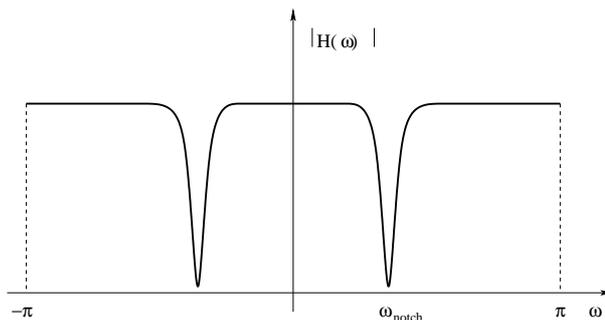


Figura 8.5 Risposta in frequenza di un filtro notch.

Questa caratteristica può essere ottenuta posizionando uno zero  $z_0 = e^{i\omega_{\text{notch}}}$  del filtro sulla circonferenza di raggio unitario e posizionando un polo  $z_p$  del filtro "vicino" allo zero, ma interno al cerchio di raggio unitario in modo tale che il filtro risulti stabile. Il filtro deve essere completato da un nuovo zero  $z_0^*$  e da un nuovo polo  $z_p^*$ , coniugati rispettivamente del primo zero e del primo polo, in modo tale che i coefficienti della risposta all'impulso siano numeri reali (vedi Figura 8.6).

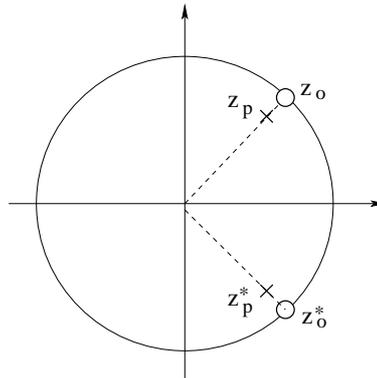


Figura 8.6 Poli e zeri di un filtro notch.

La funzione di trasferimento del filtro specificato sopra è:

$$H(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_0^*)}{(z - z_p)(z - z_p^*)}.$$

Consideriamo ora il guadagno del filtro, per  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Analizziamo separatamente due casi:

1.  $\omega$  è "molto vicino" a  $\omega_{\text{notch}}$ , cioè  $e^{i\omega} \approx e^{i\omega_{\text{notch}}}$ . In questo caso:

$$|H(e^{i\omega})| \approx |H(e^{i\omega_{\text{notch}}})| = 0.$$

2.  $\omega$  è "molto lontano" da  $\omega_{\text{notch}}$ , cioè  $e^{i\omega} - e^{i\omega_{\text{notch}}} \gg 0$ . In questo caso, ricordando che  $z_0 \approx z_p$  e che  $z_0^* \approx z_p^*$ , si ha:

$$|H(e^{i\omega})| = \frac{|e^{i\omega} - z_0|}{|e^{i\omega} - z_p|} \cdot \frac{|e^{i\omega} - z_0^*|}{|e^{i\omega} - z_p^*|} \approx 1 \cdot 1 = 1.$$

Di conseguenza, il guadagno del filtro realizzato ha una forma del tipo disegnato in Figura 8.5.

### Esempio 8.2.2.

Realizzare un filtro notch a frequenza normalizzata  $\omega_{\text{notch}}$ .

Ponendo ad esempio  $z_p = \rho e^{i\omega_{\text{notch}}}$  dove  $\rho \approx 1$  ma comunque  $\rho < 1$ , si ottiene la funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_{\text{notch}} + z^{-2}}{1 - z^{-1} 2\rho \cos \omega_{\text{notch}} + \rho^2 z^{-2}}.$$

Si ottiene quindi un filtro IIR realizzabile dalla seguente equazione:

$$y(n) = x(n) - 2 \cos \omega_{\text{notch}} x(n-1) + x(n-2) + 2\rho \cos \omega_{\text{notch}} y(n-1) - \rho^2 y(n-2).$$

Una caratteristica importante dei filtri notch è la forma a V dell'intaglio: aumentando la distanza tra il polo e lo zero tale V si "apre". È allora conveniente che il polo e lo zero siano più vicini possibile; un limite è dato tuttavia dall'errore di quantizzazione dei coefficienti. L'analisi dell'effetto della quantizzazione è data nel paragrafo 8.4.5 : possiamo qui osservare che la modifica dei coefficienti del filtro in genere si traduce in un cambiamento delle posizioni dei poli e degli zeri, con risultati distruttivi che possono portare alla instabilità del sistema se il polo non risulta più posizionato internamente al cerchio unitario.

### 8.2.3 Equalizzatore a un Polo

Come abbiamo visto in Sezione 4.4, un convertitore digitale-analogico ZOH ha una risposta in frequenza che diminuisce le ampiezze delle componenti alle frequenze più alte. Molti sistemi contengono allora un equalizzatore che compensa la distorsione del segnale creata dal convertitore. In Figura 8.7 riportiamo sia il guadagno del DAC (linea tratteggiata) sia il guadagno di un equalizzatore ideale.

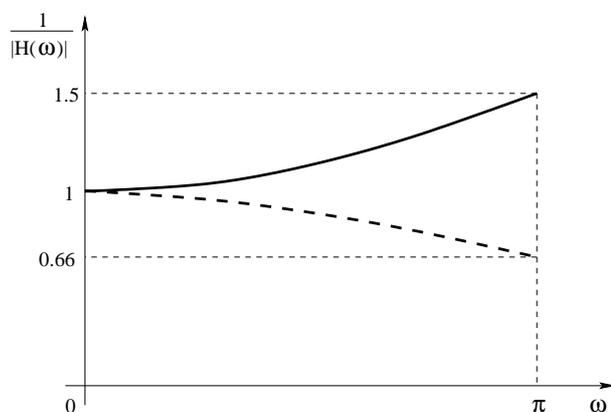


Figura 8.7 Risposta in frequenza ideale di un equalizzatore.

In questo paragrafo costruiamo un semplice equalizzatore, il cui guadagno è una ragionevole approssimazione del guadagno dell'equalizzatore ideale.

Si consideri il filtro con una funzione di trasferimento caratterizzata da un polo in  $z_0 = \alpha$ , con  $\alpha$  reale. Si osservi che, perché il filtro sia stabile, deve essere  $-1 < \alpha < 1$ .

La funzione di trasferimento, fissata una costante  $A > 0$ , è:

$$H(z) = \frac{A}{1 - \alpha z^{-1}}.$$

Di conseguenza, il guadagno di questo filtro risulta essere:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{A}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega}.$$

Posto  $\alpha = -0.14$  e  $A = 1.13$ , la funzione di trasferimento di questo filtro è:

$$H(z) = \frac{1.13}{1 + 0.14z^{-1}}.$$

Tale filtro un filtro risulta essere un filtro IIR causale e stabile, definito dall'equazione:

$$y(n) = 1.13x(n) - 0.14y(n - 1).$$

Il suo guadagno, almeno per  $|\omega| < \frac{3}{4}\pi$ , è una buona approssimazione del guadagno dell'equalizzatore ideale (con un errore inferiore a 0.01), come si può osservare dalla in Figura 8.8.

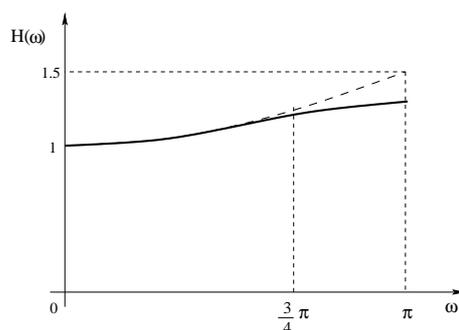


Figura 8.8 Risposta in frequenza di un equalizzatore a un polo.

Il filtro ottenuto risulta allora un buon equalizzatore per il DAC di tipo ZOH.

### 8.3 Progetto di Filtri Digitali

Un filtro digitale è un sistema LTI a tempo discreto, realizzato con aritmetica a precisione finita. La progettazione di tali filtri richiede dunque tre passi principali:

1. Specificazione delle proprietà desiderate del filtro, ad esempio la frequenza di taglio per un filtro passa-basso; poiché i filtri ideali non sono realizzabili, ci dovremo tuttavia accontentare di una approssimazione e la specifica dovrà riguardare il livello di errore che riteniamo di poter tollerare.
2. Determinazione di un filtro che soddisfa le specifiche stesse; nel caso di un filtro FIR basterà ad esempio determinare i coefficienti che definiscono la sua risposta all'impulso, in un filtro IIR basterà determinare i coefficienti dell'equazione alle differenze finite che lo caratterizzano, oppure determinare i poli e gli zeri della funzione di trasferimento.
3. Realizzazione del sistema con una rete a precisione finita, con eventuale implementazione su un DSP o su un circuito programmabile; è di particolare interesse in questa fase riuscire a controllare gli effetti della quantizzazione dei coefficienti del filtro imposti dall'uso di aritmetica a precisione finita.

Di seguito vengono analizzati più in dettaglio i punti precedenti.

#### 8.3.1 Specifiche di Filtri Digitali

Le proprietà di un filtro digitale sono generalmente ben esprimibili nel dominio delle frequenze. In particolare, per filtri selettivi come filtri passa-basso o passa-banda, le specifiche possono essere date attraverso uno *schema di tolleranza*.

Gli elementi principali di uno schema di tolleranza esemplificati per il filtro passa-basso si riferiscono al guadagno e sono (vedi Figura 8.9):

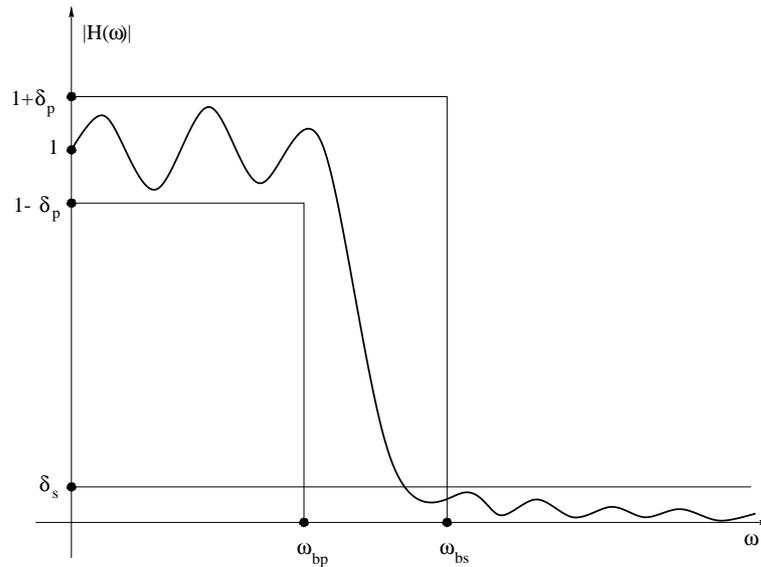


Figura 8.9 Specifiche di un filtro passa-basso.

1. le frequenze  $\omega_{bp}$  e  $\omega_{bs}$  che definiscono condizioni di accettabilità per la banda passante e la banda di transizione; queste condizioni possono essere espresse come segue:

$$\omega_{bp} \leq \omega_c < \omega_s \leq \omega_{bs},$$

dove  $\omega_c$  è la frequenza di taglio e  $\omega_s$  è la frequenza di stop del filtro. In alternativa, può essere dato un vincolo sulla dimensione  $\Delta\omega = \omega_s - \omega_c$  della banda di transizione.

2. le dimensioni massime  $\delta_p$  e  $\delta_s$  permesse alle oscillazioni rispettivamente in banda passante e in banda proibita; esse sono usualmente chiamate *deviazioni*. Le deviazioni in banda passante e proibita possono essere espresse anche in decibel:

$$A_p = 20 \log \frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p} \approx 17.4 \delta_p \text{ dB}, \quad A_s = -20 \log \delta_s \text{ dB},$$

dove  $A_p$  denota l'oscillazione in banda passante, mentre  $A_s$  denota l'attenuazione in banda proibita.

Tutte le frequenze specificate devono essere riferite alla frequenza di campionamento  $\omega_0$  ed in particolare devono essere inferiori a  $\frac{\omega_0}{2}$  così da soddisfare il criterio di Nyquist. Spesso le frequenze vengono normalizzate rispetto alla frequenza di Nyquist  $\frac{\omega_0}{2}$  ed espresse come frazioni di essa ( $\frac{\omega}{\omega_0/2}$ ). Un esempio di schema di tolleranza per un filtro passa-basso è il seguente:

banda passante	$\omega_c$	100 Hz
banda proibita	$\omega_s$	130 Hz
attenuazione (banda proibita)	$A_s$	40 dB
oscillazione (banda passante)	$A_p$	0.05 dB
frequenza di campionamento	$\omega_0$	600 Hz

Rispetto al precedente schema, la dimensione della banda di transizione normalizzata è  $\Delta\omega = 0.01$  mentre la deviazione in banda proibita è  $\delta_s = 10^{-2}$ .

Per quanto riguarda la risposta in fase, usualmente sono sufficienti specifiche di tipo qualitativo sulla linearità di tale risposta; criteri quantitativi sono richiesti solo per particolari applicazioni, ad esempio per il progetto di filtri di compensazione della risposta in fase di un sistema.

### 8.3.2 Progetto di Filtri FIR mediante Finestre

La tecnica di progettazione mediante finestre è basata sull'idea di approssimare un filtro desiderato, eventualmente non causale e con risposta all'impulso  $h_d(n)$  di durata infinita, azzerando  $h_d(n)$  al di fuori di una finestra temporale di ampiezza  $N$ , nella speranza che l'approssimazione sia tanto più buona quanto più la dimensione  $N$  della finestra è grande. Più precisamente:

1. si considera il filtro desiderato con risposta all'impulso  $h_d(n)$  eventualmente di durata infinita;
2. fissato un intero  $N$ , si costruisce il filtro FIR con risposta all'impulso  $h_N(n)$  tale che:

$$h_N(n) = \begin{cases} h_d(n), & \text{se } |n| \leq (N-1)/2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3. si ottiene infine il filtro FIR causale con risposta all'impulso  $h_N(n - N/2)$ .

Considerando la *finestra rettangolare*  $\text{rett}_N(n)$  data da:

$$\text{rett}_N(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } |n| \leq (N-1)/2 \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

possiamo scrivere:

$$h_N(n) = \text{rett}_N(n)h_d(n).$$

In altre parole,  $h_N(n)$  è ottenuta moltiplicando la risposta all'impulso del filtro che si desidera approssimare per la finestra rettangolare  $\text{rett}_N(n)$  di durata finita.

Studiamo ora come il filtro con risposta  $h_N(n)$  approssima il filtro con risposta  $h_d(n)$ , al variare di  $N$ . Per semplicità assumiamo che il filtro che desideriamo approssimare sia un filtro passa-basso ideale caratterizzato dalla seguente risposta in frequenza:

$$H_d(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| \leq 1 \\ 0, & \text{se } 1 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Denotiamo con  $H_N(e^{i\omega})$  la risposta in frequenza del filtro  $h_N(n)$ . Si possono osservare due fenomeni, di cui in seguito daremo spiegazione:

1.  $H_N(e^{i\omega})$  ha una banda di transizione non nulla, la cui ampiezza converge a 0 quando  $N$  diverge;
2.  $|H_N(e^{i\omega})|$  presenta delle oscillazioni, sia in banda passante sia in banda proibita, la cui ampiezza massima è circa 0.2, indipendentemente dalla dimensione temporale  $N$  della finestra.

Il secondo fenomeno è particolarmente negativo, ed è collegato al tipo di convergenza della serie di Fourier (fenomeno di Gibbs); esso tuttavia può essere limitato, anche se non completamente eliminato, scegliendo finestre  $w_N(n)$  diverse dalla finestra rettangolare. Tali finestre non dovranno avere discontinuità come quella rettangolare, dovranno essere diverse da 0 nell'intervallo  $-(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2$  e dovranno essere simmetriche rispetto all'origine.

La relazione tra il filtro desiderato e il filtro FIR ottenuto con la finestra  $w_N(n)$  è allora:

$$h_N(n) = w_N(n)h_d(n). \quad (8.2)$$

Esempi di finestre comunemente usate oltre alla finestra rettangolare sono elencate di seguito.

*Finestra Triangolare (o Bartlett):*

$$w_N(n) = \begin{cases} 1 + \frac{2n}{N}, & \text{se } -(N-1)/2 \leq n < 0 \\ 1 - \frac{2n}{N}, & \text{se } 0 \leq n \leq (N-1)/2. \end{cases}$$

*Finestra di Hanning:*

$$w_N(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi n}{N} \right], \quad |n| \leq (N-1)/2.$$

*Finestra di Hamming:*

$$w_N(n) = 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N}, \quad |n| \leq (N-1)/2.$$

Kaiser ha inoltre proposto una famiglia di finestre  $k_N(n, \omega_a)$ , parametrizzata da  $\omega_a$ . La Figura 8.10 illustra il grafico delle finestre sopra elencate.

La progettazione mediante finestre richiede di operare due scelte:

1. il tipo di finestra,
2. la dimensione  $N$  dell'intervallo.

Le scelte progettuali sono legate alle seguenti considerazioni:

1. la massima ampiezza delle oscillazioni in banda passante e proibita dipende dal tipo di finestra ma non dipende da  $N$ ;
2. l'ampiezza della banda di transizione è inversamente proporzionale ad  $N$ , con coefficiente di proporzionalità dipendente dal tipo di finestra.

La Tabella 8.1 riporta l'ampiezza delle oscillazioni in banda passante e proibita e l'ampiezza della banda di transizione (normalizzata alla frequenza di campionamento) per la finestra rettangolare, quella Hanning e quella di Hamming.

### Esempio 8.3.1.

Vogliamo determinare col metodo delle finestre i coefficienti di un filtro FIR, che verifica il seguente schema di tolleranza:

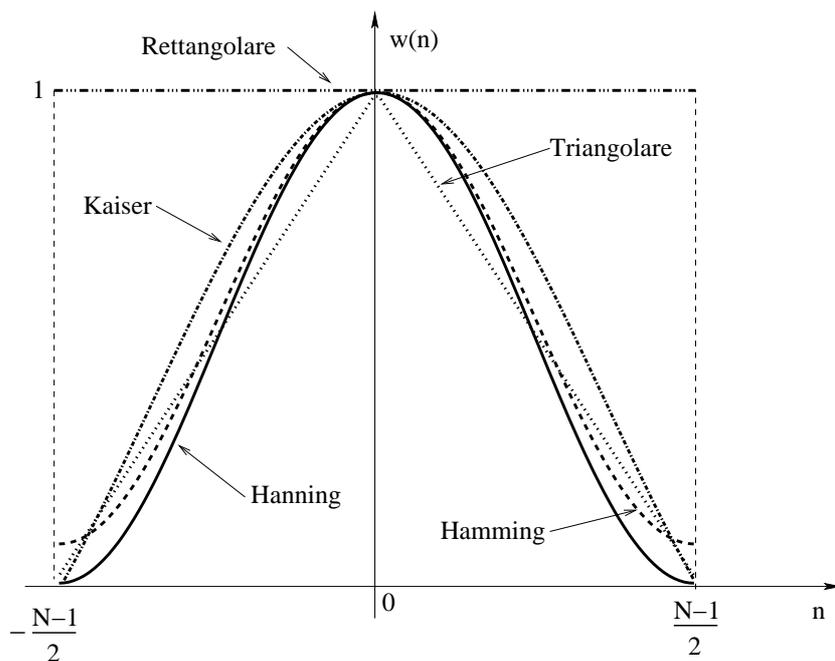


Figura 8.10 Finestre comunemente usate per il progetto di filtri FIR.

Tabella 8.1 Ampiezza delle oscillazioni in banda passante e proibita e l'ampiezza della banda di transizione (normalizzata) di alcune finestre.

Finestra	Osc. $A_p$ (dB)	Att. $A_s$ (dB)	Amp. trans. (Hz)
Rettangolare	0.74	21	$1/N$
Hanning	0.05	44	$3.1/N$
Hamming	0.02	53	$3.3/N$

banda passante	$\omega_c$	500 Hz
banda proibita	$\omega_s$	650 Hz
attenuazione (banda proibita)	$A_s$	50 dB
oscillazione (banda passante)	$A_p$	0.05 dB
frequenza di campionamento	$\omega_0$	3 KHz

Dalla Tabella 8.1 si evince che solo la finestra di Hamming permette un'attenuazione di almeno 50 dB.

L'ampiezza della banda di transizione, normalizzata alla frequenza di campionamento, risulta  $\Delta\omega = (650 - 500)/3000 = 0.05$ ; riferendoci alla Tabella 8.1 possiamo concludere che la finestra di Hamming con dimensione  $N = 67 > 3.3/0.05$  soddisfa i vincoli dello schema di tolleranza. Tali coefficienti risultano allora ottenibili dalla finestra:

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N}, & \text{se } |n| \leq 33 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

### Analisi del fenomeno di Gibbs

In questa sottosezione diamo una spiegazione qualitativa dei due fenomeni precedentemente rilevati:

1.  $H_N(e^{i\omega})$  ha una banda di transizione non nulla, la cui ampiezza converge a 0 quando  $N$  diverge;
2.  $|H_N(e^{i\omega})|$  presenta delle oscillazioni, sia in banda passante sia in banda proibita, di ampiezza massima indipendente dalla dimensione temporale  $N$  della finestra.

Poiché il filtro  $h_N(n)$  ottenuto trattando il filtro desiderato  $h_d(n)$  con la finestra  $w_N(n)$  è tale che

$$h_N(n) = w_N(n)h_d(n),$$

dal teorema di convoluzione si ottiene

$$H_N(e^{i\omega}) = H_d(e^{i\omega}) * W_N(e^{i\omega}),$$

dove  $H_d(e^{i\omega})$  è la risposta in frequenza di un filtro passa-basso desiderato e  $W_N(e^{i\omega})$  è la risposta in frequenza della finestra  $w_N(n)$ .

Per le finestre considerate, la funzione  $W_N(e^{i\omega})$  può essere approssimata con funzioni della famiglia  $G_{\Delta,a}(\omega)$  (con  $\Delta$  e  $a$  reali positivi), mostrata in Figura 8.11 assieme al grafico della risposta in frequenza del filtro ideale passa-basso:

$$G_{\Delta,a}(\omega) = \begin{cases} \frac{1+a}{\Delta}, & \text{se } |\omega| \leq \Delta \\ -\frac{a}{\Delta}, & \text{se } \Delta < |\omega| \leq 2\Delta \\ 0, & \text{se } |\omega| > 2\Delta. \end{cases}$$

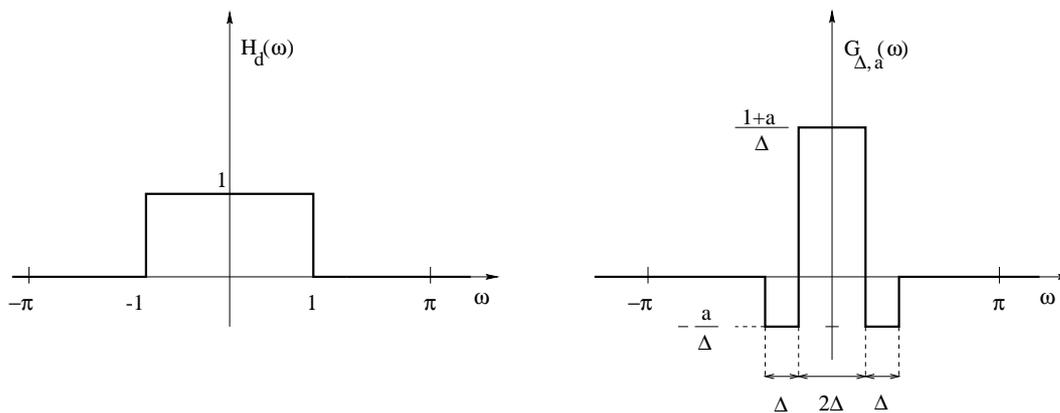


Figura 8.11 Grafico delle funzioni  $H_d(\omega)$  e  $G_{\Delta,a}(\omega)$ .

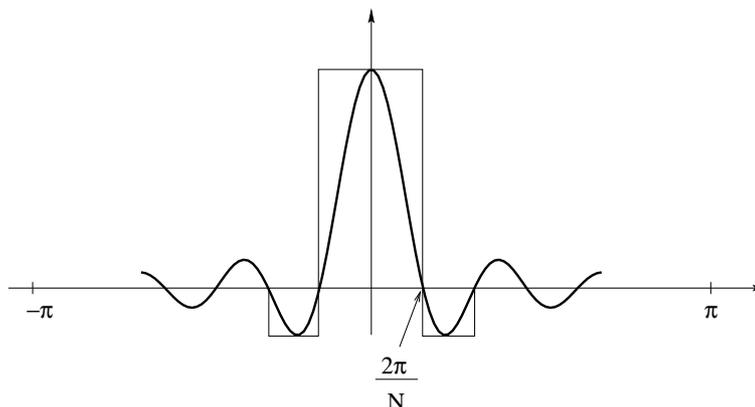
In altre parole,  $G_{\Delta,a}(\omega)$  è composta da un lobo rettangolare centrale di altezza  $\frac{1+a}{\Delta}$  e base  $2\Delta$  e da due lobi laterali, anch'essi rettangolari, di altezza  $\frac{a}{\Delta}$  e base  $\Delta$ ; siamo qui interessati a studiare il caso  $0 < a \ll 1$ , per cui vale che  $a \approx \frac{|\text{altezza lobo laterale}|}{|\text{altezza lobo centrale}|}$ .

**Esempio 8.3.2.**

Per la finestra rettangolare vale:

$$\text{RETT}_N(\omega) = \sum_{n=0}^N e^{i\omega n} = \frac{1 - e^{i\omega(N+1)}}{1 - e^{i\omega}} = e^{-i\omega \frac{N+1}{2}} \frac{\sin(\omega(N+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$$

A meno di una variazione di fase, il grafico della funzione  $\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$  è mostrato in Figura 8.12. Trascurando i lobi laterali ad eccezione dei tre lobi centrali, possiamo



**Figura 8.12** Grafico della funzione  $\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$ .

approssimare la funzione  $\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$  con  $G_{\Delta,a}(\omega)$  (come mostrato nella figura), dove  $\Delta = \frac{2\pi}{N}$  e  $a \approx \frac{2}{3}\pi$ , poiché l'altezza del lobo centrale è  $N$  e quella dei lobi laterali è  $\frac{2}{3}\pi N$ .

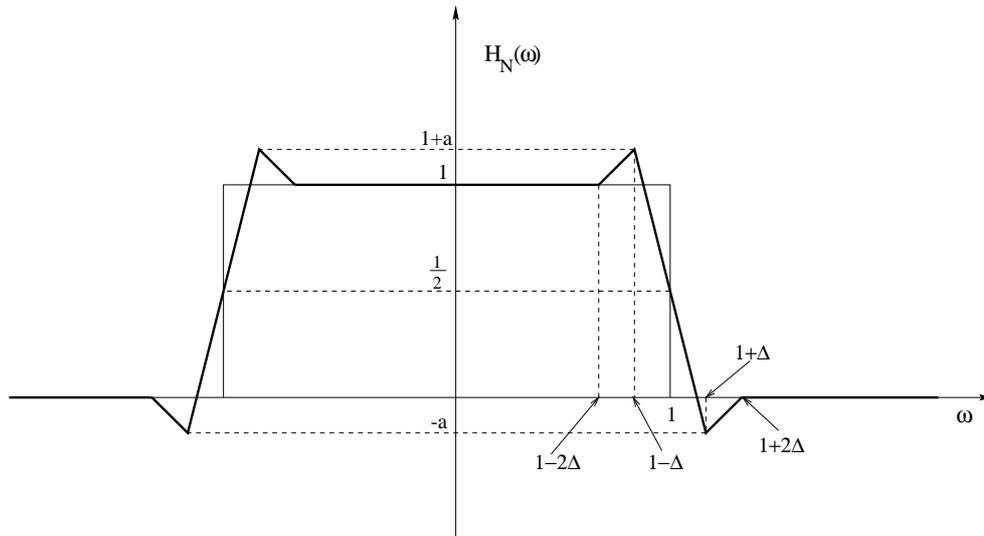
Le principali caratteristiche delle varie finestre, che permettono di approssimare le risposte in frequenza con una funzione del tipo  $G_{\Delta,a}(\omega)$  sono elencate nelle Tabella 8.2

**Tabella 8.2** Caratteristiche delle principali finestre.

Finestra	$20 \log a$ (dB)	Larghezza lobo centrale
Rettangolare	-13	$4\pi/N$
Triangolare	-25	$8\pi/N$
Hanning	-37	$8\pi/N$
Hamming	-41	$8\pi/N$

La convoluzione  $H_N(e^{i\omega}) = H_d(e^{i\omega}) * G_{\Delta,a}(\omega)$  può essere facilmente calcolata e risulta essere la funzione lineare a pezzi di Figura 8.13. Dal grafico precedente osserviamo che il filtro passa-basso ideale viene approssimato da un filtro che ha le seguenti caratteristiche:

1. la massima ampiezza delle oscillazioni sia in banda passante sia in banda proibita è  $a$ ; essa in particolare non dipende da  $\Delta$ ;



**Figura 8.13** Grafico della funzione  $H_N(e^{i\omega})$ , ottenuta dalla convoluzione di  $H_d(e^{i\omega})$  e  $G_{\Delta,a}(\omega)$ .

2. la dimensione della banda di transizione è proporzionale a  $\Delta$ .

Possiamo di conseguenza trarre le seguenti conclusioni:

- la dimensione della banda di transizione del filtro approssimato è proporzionale a  $1/N$ , poiché la larghezza del lobo centrale di una maschera è inversamente proporzionale a  $N$ .
- a parità di dimensione della durata temporale delle finestre, la dimensione della banda di transizione del filtro ottenuto dalla finestra rettangolare è metà di quella ottenuta dalle finestre tringolari, di Hanning e di hamming;
- la massima ampiezza delle oscillazioni create dalla finestra rettangolare ( $a \approx 0.2$ ) è molto maggiore di quella delle oscillazioni create dalle altre finestre ( $a \approx 0.01$  per la finestra di Hamming). Questo spiega perché la finestra rettangolare, pur più semplice da realizzare, è scarsamente usata.

### 8.3.3 Progetto di Filtri FIR col Metodo Ottimo

Come abbiamo visto, il metodo della finestra crea filtri con un “picco” nelle oscillazioni in corrispondenza della frequenza di taglio e frequenza di stop, come evidenziato nella Figura 8.14.

Risulta naturale tentare di abbassare l’altezza massima delle oscillazioni “spalmandole” su tutta la banda passante e proibita: questa è l’idea che sta alla base della costruzione del filtro ottimo, nel senso di Chebishev.

Il metodo considera al solito la risposta all’impulso  $h_d(n)$  del filtro che si desidera approssimare e che ha una ideale risposta in frequenza  $H_d(e^{i\omega})$ ; fissato  $N$ , si prende in considerazione l’insieme  $F_N$  tutti i filtri FIR  $h$  di ordine  $N$ , cioè con risposta all’impulso descrivibile da  $N$  valori  $h = (h(0), \dots, h(N-1))$ . Se  $H(e^{i\omega})$  la risposta in frequenza del

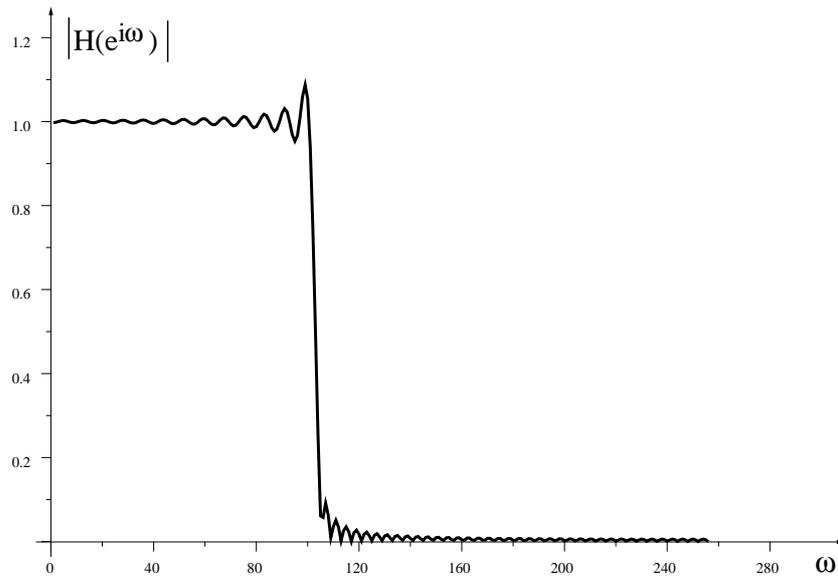


Figura 8.14 Modulo della risposta in frequenza di un filtro passa-basso ottenuto col metodo delle finestre.

generico filtro  $h$ , si definisce come errore di approssimazione di  $h_d$  con  $h$ , la quantità

$$e(h, h_d) = \max_{\omega} |H_d(e^{i\omega}) - H_h(e^{i\omega})| \Psi(\omega),$$

dove  $\Psi(\omega)$  è una opportuna funzione peso che consente di trattare il caso in cui i vincoli imposti alle oscillazioni in banda passante e proibita siano diversi.

Il filtro ottimo  $\hat{h}$  è il filtro di  $F_N$  che minimizza l'errore:

$$\hat{h} = \arg \min_{h \in F_N} e(h, h_d).$$

Si può dimostrare che il filtro ottimo è caratterizzato da "equioscillazioni" in banda passante e banda proibita, come mostrato nella Figura 8.15

Esistono vari algoritmi per risolvere il problema di minimo; i principali sistemi CAD implementano procedure che, avendo in ingresso  $N$  e le specifiche del filtro desiderato  $h_d(n)$ , danno in uscita i coefficienti di  $\hat{h}$ .

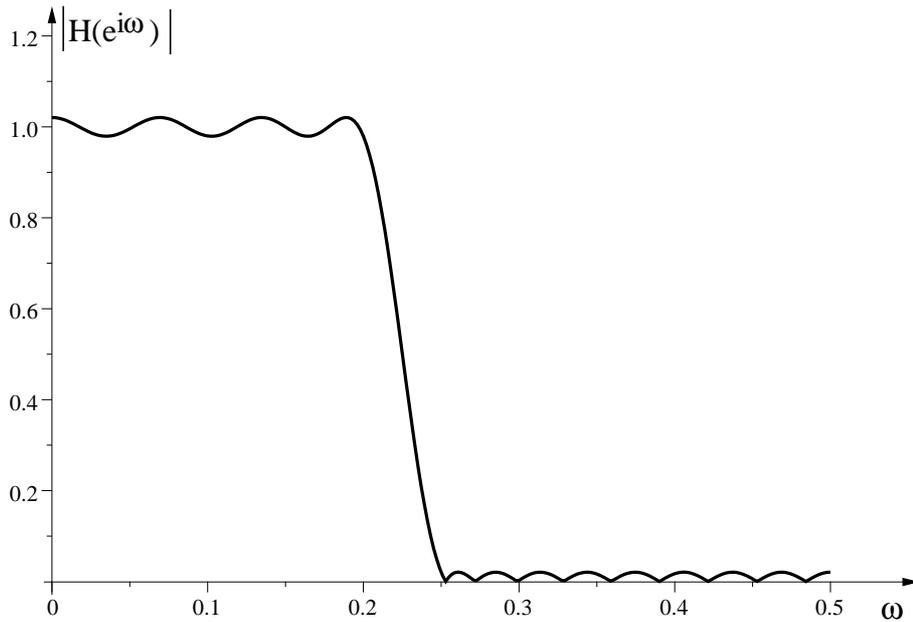
Poiché in generale il numero  $N$  è incognito mentre lo schema di tolleranza dà la dimensione della banda di transizione normalizzata e le deviazioni  $\delta_s$  e  $\delta_p$ , è necessario preliminarmente effettuare una stima di  $N$ . Per filtri passa-basso  $N$  può essere stimato dalla seguente relazione empirica:

$$N \approx \frac{D(\delta_p, \delta_s)}{\Delta_F} - f(\delta_p, \delta_s) \Delta_F + 1$$

dove  $\Delta_F$  è l'ampiezza della banda di transizione normalizzata alla frequenza di campionamento,  $\delta_p$  è la deviazione in banda passante e  $\delta_s$  la deviazione in banda proibita.

Inoltre:

$$D(\delta_p, \delta_s) = \log_{10} \delta_s [a_1 (\log_{10} \delta_p)^2 + a_2 \log_{10} \delta_p + a_3] \\ + [a_4 (\log_{10} \delta_p)^2 + a_5 \log_{10} \delta_p + a_6]$$



**Figura 8.15** Modulo della risposta in frequenza di un filtro passa-basso ottimale di ordine  $N = 20$ .

e

$$f(\delta_p, \delta_s) = 11.012 + 0.5124(\log_{10} \delta_p - \log_{10} \delta_s),$$

con

$$\begin{aligned} a_1 &= 5.4 \times 10^{-3}, & a_2 &= 7.11 \times 10^{-2}, & a_3 &= -4.76 \times 10^{-1}, \\ a_4 &= 2.66 \times 10^{-3}, & a_5 &= -5.94 \times 10^{-1}, & a_6 &= -4.28 \times 10^{-1}. \end{aligned}$$

Discutiamo qui brevemente come determinare col metodo ottimale i coefficienti di filtri specificati attraverso uno schema di tolleranza, utilizzando il sistema Scilab. In Scilab è implementato l'algoritmo di Remez, che può essere richiamato con un comando che, nella sua forma basilare, è:

$$b = \text{eqfir}(N, F, M, W)$$

dove:

1.  $N$  denota il numero di coefficienti del filtro;
2.  $F$  denota un vettore di intervalli di frequenze normalizzate (bande);
3.  $M$  denota il vettore dei guadagni desiderati in ogni banda;
4.  $W$  denota un vettore dei pesi relativi delle ampiezze delle oscillazioni nelle varie bande;
5.  $b$  denota il vettore dei coefficienti del filtro ottimo.

Va segnalato che la normalizzazione qui è riferita alla frequenza di campionamento.

**Esempio 8.3.3.**

Determinare il filtro passa-banda ottimo a 50 coefficienti, quando lo schema di tolleranza è:

banda passante	500-700 Hz
ampiezza bande di transizione	100 Hz
frequenza di campionamento	2000 Hz

La specifica richiede che il guadagno sia 0 nella banda 0-400 Hz, sia 1 nella banda 500-700 Hz, sia nuovamente 0 nella banda 800-1000 Hz. Si ricorda che la frequenza di Nyquist risulta 1000 Hz. Normalizzando rispetto alla frequenza di campionamento, si ottengono i seguenti intervalli: 0-0.2, 0.25-0.35, 0.4-0.5

Un programma scritto in Scilab che calcola i coefficienti del filtro ottimo e dà il grafico del guadagno è:

```

N = 50
F = [0 0.2; 0.25 0.35; 0.4 0.5]
M = [0 1 0]
W = [1 1 1]
b = eqfir(N,F,M,W)
[H,f] = frmag(b,512)
plot(f,abs(H))

```

**8.3.4 Progetto di Filtri IIR da Filtri Analogici**

Un approccio alla progettazione di filtri IIR, consiste nel trasformare un filtro analogico (per esempio un filtro di Butterworth) in un corrispondente filtro digitale che soddisfi le specifiche.

Supponiamo, ad esempio, che un filtro analogico causale sia descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\sum_{k=0}^{M-1} c_k \frac{d^k}{dt^k} g(t) = \sum_{k=0}^{L-1} d_k \frac{d^k}{dt^k} f(t),$$

dove  $f(t)$  è il segnale di ingresso e  $g(t)$  quello di uscita. Una semplice idea per ottenere un sistema digitale IIR con caratteristiche simili a quello analogico consiste nell'approssimare l'operazione di derivata con quello di differenza finita, seguendo un approccio tipico dell'analisi numerica. Ci si può aspettare che con alte frequenze di campionamento l'approssimazione risulti accettabile.

A questo riguardo, fissata la frequenza di campionamento  $\frac{1}{T}$  Hz, poniamo:

$$x(n) = f(nT), \quad y(n) = g(nT).$$

Approssimando la derivata di una funzione  $A(t)$  col rapporto incrementale, si ha che:

$$\left. \frac{d}{dt} A(t) \right|_{t=nT} \approx \frac{A(nT) - A((n-1)T)}{T}.$$

Possiamo allora sostituire  $\frac{d}{dt} g(t)$  con  $\nabla y(n) = \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$  e  $\frac{d^k}{dt^k} g(t)$  con  $\nabla^k y(n)$ , dove  $\nabla^0 y(n) = y(n)$  e  $\nabla^k y(n) = \nabla(\nabla^{k-1} y(n))$  se  $k > 0$ . Sostituzioni analoghe possono essere fatte per  $\frac{d^k}{dt^k} f(t)$ .

Il sistema digitale corrispondente a quello analogico viene allora descritto dalla seguente equazione:

$$\sum_{k=0}^{M-1} c_k \nabla^k y(n) = \sum_{k=0}^{L-1} d_k \nabla^k x(n)$$

#### Esempio 8.3.4.

Si consideri il sistema analogico descritto dall'equazione differenziale:

$$g(t) = ag'(t) + bg''(t) + f(t).$$

Posto  $x(n) = f(nT)$  e  $y(n) = g(nT)$ , risulta:

$$\begin{aligned} \nabla y(n) &= \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \\ \nabla^2 y(n) &= \nabla(\nabla y(n)) = \nabla \frac{y(n) - y(n-1)}{T} = \frac{\nabla y(n) - \nabla y(n-1)}{T} \\ &= \frac{y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)}{T^2}. \end{aligned}$$

Da cui si ricava il seguente sistema digitale:

$$y(n) = \frac{T^2}{T^2 - aT - b} \left[ \frac{T-2b}{T^2} y(n-1) + \frac{b}{T^2} y(n-2) + x(n) \right].$$

## 8.4 Realizzazione di Filtri Digitali

In un filtro FIR il valore  $y(n)$  dell'uscita al tempo  $n$  è dato da:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k).$$

Più in generale, in un filtro IIR il valore  $y(n)$  dell'uscita al tempo  $n$  può essere riscritto nella forma:

$$y(n) = \sum_{k=1}^{L-1} c_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M-1} d_k x(n-k).$$

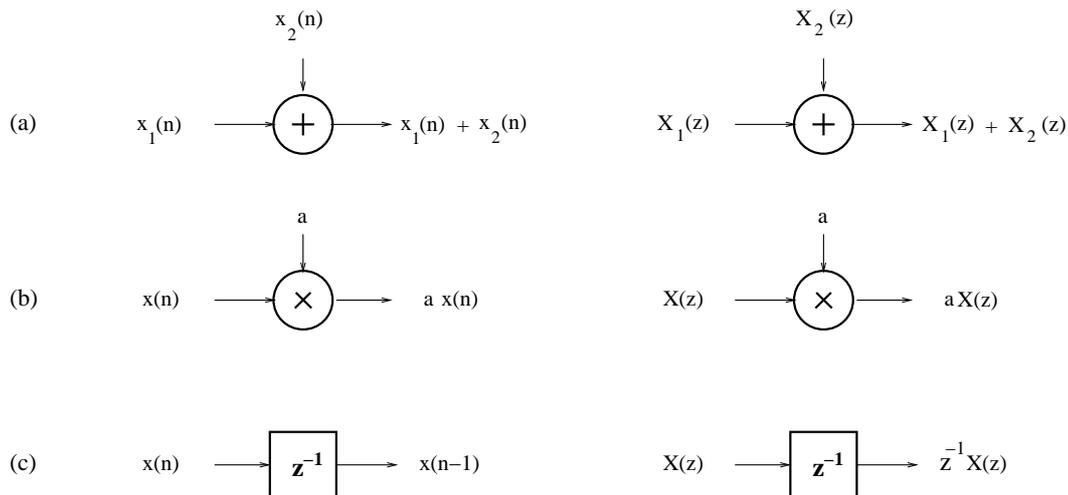
In ogni caso, per il calcolo di  $y(n)$  si richiede:

1. la disponibilità dei valori di uscita ai tempi  $n-1, \dots, n-L+1$  e la disponibilità dei valori di ingresso ai tempi  $n, \dots, n-M+1$ ;
2. la disponibilità permanente dei coefficienti moltiplicativi  $c_1, \dots, c_{L-1}$  e  $d_1, \dots, d_{M-1}$ ;
3. l'effettuazione di moltiplicazioni e somme in accordo alla forma generale.

Queste operazioni possono essere implementate su un calcolatore tradizionale o su hardware specializzato; in quest'ultimo caso è conveniente rappresentare una procedura di calcolo del filtro mediante una rete i cui nodi sono etichettati con gli operatori di somma, moltiplicazione per costante e ritardo temporale, come descritto in Figura 8.16.

In particolare, considereremo reti con un unico nodo di ingresso privo di predecessori, un unico nodo di uscita privo di successori e nodi interni del tipo somma, moltiplicazione per costante e ritardo temporale.

I problemi che affrontiamo sono di due tipi:



**Figura 8.16** Operatore di somma (a), moltiplicazione per costante (b) e ritardo temporale (c), rispettivamente nel dominio del tempo  $n$  e nella trasformata  $z$ .

**Analisi:** data una rete, trovare la funzione di trasferimento del filtro digitale realizzato dalla rete stessa.

**Sintesi:** dato il filtro specificato ad esempio dall'equazione alle differenze o equivalentemente dalla sua funzione di trasferimento, determinare una rete che lo realizzi.

### 8.4.1 Analisi di Reti

Per quanto riguarda la problematica di analisi, data una rete  $R$ , la funzione di trasferimento  $H_R(z)$  del filtro realizzato da  $R$  può essere ottenuta dalla seguente procedura:

**Input:** Una rete  $R$  con un unico ingresso e un'unica uscita;

1. Associa all'arco di ingresso la funzione  $X(z)$ , trasformata  $z$  del segnale di ingresso  $x(n)$ , all'arco di uscita la funzione  $Y(z)$ , trasformata  $z$  del segnale di uscita  $y(n)$ , all'arco di uscita di ogni nodo interno  $k$  la funzione ausiliaria  $W_k(z)$ .
2. Per ogni nodo della rete, ad esclusione del nodo di ingresso, costruisci un'equazione come segue:
  - a. Se il nodo  $k$  è un nodo di ritardo temporale e la funzione associata all'arco di ingresso è  $W(z)$ , poni  $W_k(z) = z^{-1}W(z)$ .
  - b. Se il nodo  $k$  è un nodo di somma e le funzioni associate ai due archi di ingresso sono  $W(z)$  e  $S(z)$ , poni  $W_k(z) = W(z) + S(z)$ .
  - c. Se il nodo  $k$  è un nodo di moltiplicazione per la costante  $a$  e la funzione associata all'arco di ingresso è  $W(z)$ , poni  $W_k(z) = aW(z)$ .
3. Elimina dalle equazioni ottenute le funzioni ausiliarie  $W_k(z)$  associate ai nodi interni, ottenendo una relazione del tipo  $Y(z) = H_R(z)X(z)$ .

**Output:** La funzione  $H_R(z)$  razionale in  $z^{-1}$ .

**Esempio 8.4.1.**

Si consideri la rete  $R1$  indicata in Figura 8.17.

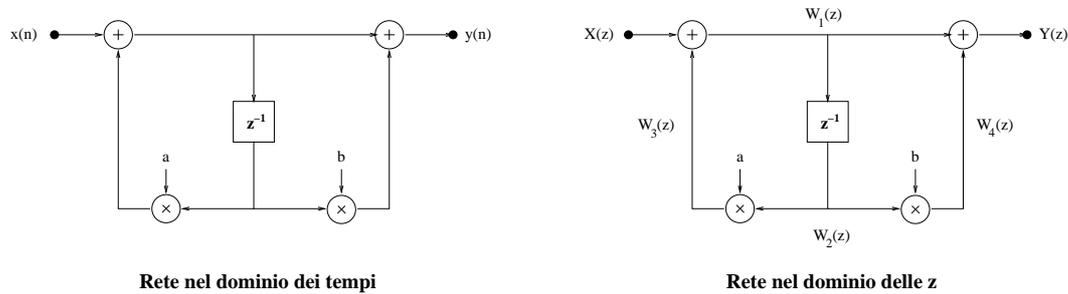


Figura 8.17 Esempio di rete.

Per ottenere la relazione ingresso-uscita  $Y(z) = H_{R1}(z)X(z)$  e quindi la funzione di trasferimento  $H_{R1}(z)$  del filtro da essa realizzato, è sufficiente scrivere le equazioni ai nodi ed eliminare successivamente le funzioni ausiliarie, come segue.

Le equazioni sono le seguenti:

$$\begin{aligned} W_1(z) &= X(z) + W_3(z) \\ W_2(z) &= z^{-1}W_1(z) \\ W_3(z) &= aW_2(z) \\ W_4(z) &= bW_2(z) \\ Y(z) &= W_1(z) + W_4(z), \end{aligned}$$

da cui si ricava che:

$$H_{R1}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + bz^{-1}}{1 - az^{-1}}.$$

Dalla precedente equazione si deriva facilmente:

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z) + bz^{-1}X(z).$$

Antitrasformando, otteniamo l'equazione del filtro IIR realizzato dalla rete:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) + bx(n-1).$$

## 8.4.2 Reti Modulari a più Ingressi e Uscite

Un rete complessa viene più facilmente analizzata se può essere vista come rete di piccola dimensione, le cui componenti sono a loro volta reti. Questo permette di fattorizzare l'analisi in:

- determinazione della funzione di trasferimento delle varie componenti (moduli);
- determinazione della funzione di trasferimento della rete a partire da quelle delle sue componenti.

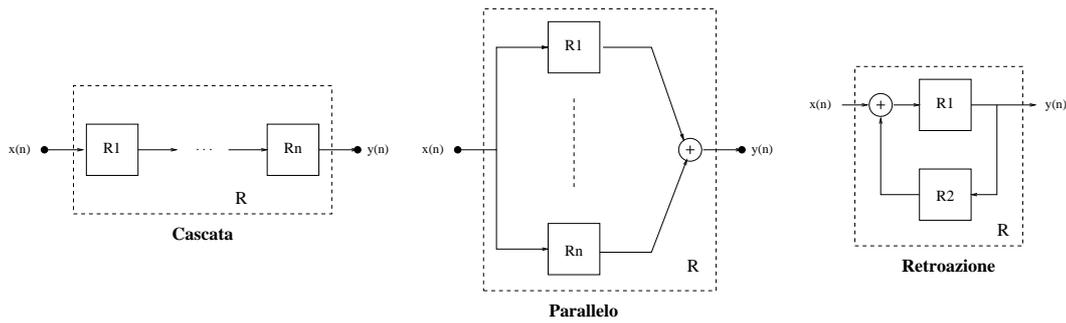


Figura 8.18 Composizione in cascata, parallelo e retroazione.

Reti con caratteristiche di modularità possono essere costruite in modo naturale partendo da reti-base, come la moltiplicazione per una costante o il ritardo, applicando poi semplici operazioni permettono di associare a due o più reti una nuova rete. Alcune di queste operazioni sono illustrate in Figura 8.18.

**Composizione sequenziale (o cascata):** date  $m$  reti  $R_1, \dots, R_m$  con funzioni di trasferimento rispettivamente  $H_{R_1}(z), \dots, H_{R_m}(z)$ , la cascata di esse è la rete  $R$  che si ottiene ponendo in ingresso alla rete  $R_{i+1}$  l'uscita della rete  $R_i$  ( $1 \leq i < m$ ); la rete  $R$  ha come funzione di trasferimento  $H_R(z) = H_{R_1}(z) \times \dots \times H_{R_m}(z)$ .

**Composizione parallela:** date  $m$  reti  $R_1, \dots, R_m$  con funzioni di trasferimento rispettivamente  $H_{R_1}(z), \dots, H_{R_m}(z)$ , la composizione parallela di esse è la rete  $R$  che si ottiene ponendo lo stesso ingresso alle reti  $R_1, \dots, R_m$  e sommando le uscite; la rete  $R$  ha come funzione di trasferimento  $H_R(z) = H_{R_1}(z) + \dots + H_{R_m}(z)$ .

**Retroazione:** date due reti  $R_1$  e  $R_2$  con funzioni di trasferimento  $H_{R_1}(z)$  e  $H_{R_2}(z)$ , la retroazione di  $R_2$  su  $R_1$  è la rete  $R$  che si ottiene ponendo in ingresso a  $R_1$  la somma dell'input e dell'uscita di  $R_2$ , e ponendo l'uscita di  $R_1$  in ingresso a  $R_2$ ; la rete  $R$  ha come funzione di trasferimento  $H_R(z) = \frac{H_{R_1}(z)}{1 - H_{R_2}(z)}$ .

#### Esempio 8.4.2.

L'integratore  $\sum_{k=0}^n x(k)$  è descritto dalla rete riportata in Figura 8.19.

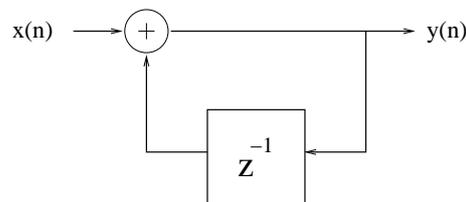
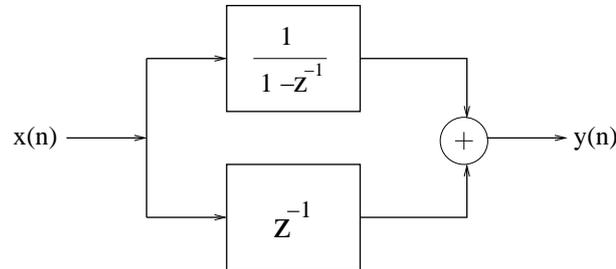


Figura 8.19 Integratore numerico.

Esso risulta dunque la retroazione del ritardo sulla rete identità ed ha come funzione di trasferimento  $\frac{1}{1-z^{-1}}$ .

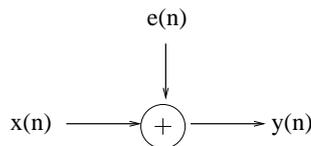
**Esempio 8.4.3.**

La rete in Figura 8.20 è la composizione parallela di un integratore e di un ritardo. La sua funzione di trasferimento è  $\frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-1}$ .



**Figura 8.20** Composizione parallela.

Fino ad ora abbiamo considerato reti con un solo ingresso e una sola uscita. Talvolta è necessario prendere in considerazione reti che hanno più di un ingresso o più di una uscita. Un semplice ma importante esempio è il modello di rumore additivo mostrato in Figura 8.21.



**Figura 8.21** Rumore additivo.

Questa rete ha due ingressi, il segnale  $x(n)$  e il disturbo  $e(n)$ . L'uscita  $y(n)$  è data dalla somma  $x(n) + e(n)$ .

Le considerazioni fatte su reti a un ingresso e un'uscita si estendono facilmente a reti arbitrarie. Consideriamo reti con segnali di ingresso  $x_1(n), \dots, x_a(n)$  e con segnali di uscita  $y_1(n), \dots, y_b(n)$ ; dette  $X_1(z), \dots, X_a(z)$  le trasformate zeta dei segnali di ingresso e  $Y_1(z), \dots, Y_b(z)$  le trasformate zeta dei segnali di uscita, si possono facilmente determinare funzioni razionali  $R_{jk}(z)$  ( $1 \leq j \leq a, 1 \leq k \leq b$ ) tali che:

$$Y_j(z) = \sum_{k=1}^a R_{jk}(z) X_k(z), \quad (1 \leq j \leq b).$$

La matrice  $A(z) = [R_{jk}(z)]$  è detta *matrice di trasferimento* della rete, e gran parte delle considerazioni fatte per le funzioni di trasferimento possono essere estese alle matrici di trasferimento.

Per esempio, la matrice di trasferimento della rete ottenuta mettendo in cascata reti  $S_1$  e  $S_2$  con matrici di trasferimento  $A_1(z)$  e  $A_2(z)$  è il prodotto  $A_1(z)A_2(z)$ , mentre quella della rete ottenuta componendo in parallelo reti  $S_1$  e  $S_2$  con matrici di trasferimento  $A_1(z)$  e  $A_2(z)$  è la somma  $A_1(z) + A_2(z)$ .

Una notevole differenza è tuttavia legata al fatto che il prodotto di matrici non è in generale commutativo, mentre il prodotto di funzioni di trasferimento lo è: nel caso di reti

a più ingressi e uscite, il risultato di una cascata di reti dipende generalmente dall'ordine, mentre nel caso di reti a un ingresso e un'uscita il risultato non dipende dall'ordine (abbiamo vista una applicazione di questo principio in Sezione 4.4.1).

Come applicazione dei concetti esposti, nella prossima sezione analizziamo una importante classe di filtri digitali: i modulatori sigma-delta.

### 8.4.3 Analisi del Modulatore Sigma-Delta (SDM)

Il modulatore sigma-delta è un'interessante applicazione alla conversione analogico digitale dei principi del sovracampionamento. Il modulatore sigma-delta del primo ordine è già stato introdotto in Sezione 4.3.2, e può essere descritto dalla rete mostrato in Figura 8.22.

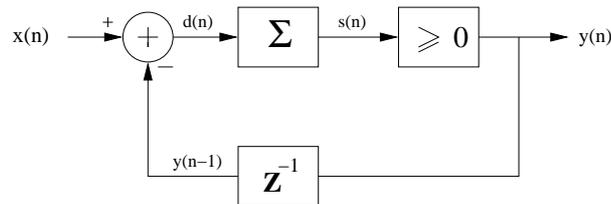


Figura 8.22 SDM del primo ordine.

Il modulo "Σ" è un integratore, così che  $s(n) = \sum_{k=-\infty}^n d(k)$ , mentre il modulo denotato " $\geq 0$ " risulta essere un quantizzatore a 1 bit. Denotiamo con  $e(n) = y(n) - s(n)$  l'errore di quantizzazione, così che  $y(n) = e(n) + s(n)$ . Evidenziando l'errore di quantizzazione come disturbo, il circuito può essere equivalentemente descritto dalla rete in Figura 8.23.

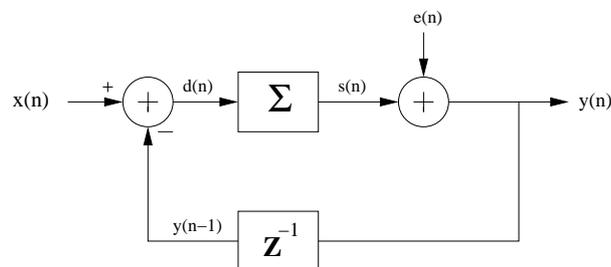


Figura 8.23 SDM con errore di quantizzazione.

Poiché la risposta all'impulso unitario del nodo integratore "Σ" è il gradino  $u(n)$ , la funzione di trasferimento di "Σ" risulta essere  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ .

Dette  $X(z)$ ,  $Y(z)$ ,  $E(z)$  le trasformate zeta di  $x(n)$ ,  $y(n)$ ,  $e(n)$  rispettivamente, la relazione tra  $X(z)$ ,  $Y(z)$ ,  $E(z)$  è descritta dalla rete in Figura 8.24.

Vale quindi che  $Y(z) = E(z) + \frac{1}{1-z^{-1}}(X(z) - z^{-1}Y(z))$ ; risolvendo rispetto a  $Y(z)$  si ottiene:

$$Y(z) = X(z) + E(z)(1 - z^{-1}).$$

Antitrasformando, l'equazione precedente mostra che l'uscita  $y(n)$  è ottenuta aggiungendo all'ingresso  $x(n)$  il rumore di quantizzazione  $e(n)$  filtrato con un filtro la cui funzione di trasferimento è  $1 - z^{-1}$ . Come mostrato in Sezione 7.4.1, tale filtro risulta essere un

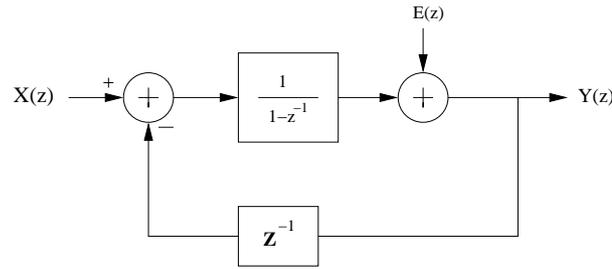


Figura 8.24 SDM in termini di trasformate zeta.

filtro passa-alto il cui guadagno  $G(\omega)$ , illustrato in Figura 8.25, è:

$$G(\omega) = 4 \sin^2 \frac{\omega}{2},$$

dove  $\omega = \frac{2\pi f}{F_s}$  è la frequenza normalizzata alla frequenza di campionamento  $F_s$ . L'effetto del filtro è di attenuare il rumore alle basse frequenze, aumentandolo invece alle alte frequenze (noise-shaping).

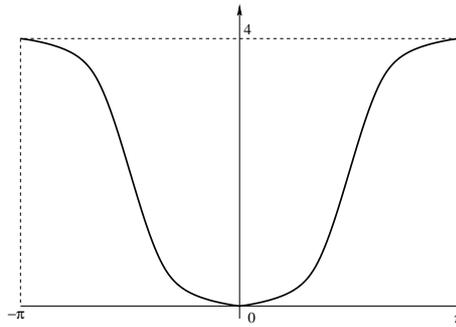


Figura 8.25 Guadagno del filtro passa-alto con funzione di trasferimento  $1 - z^{-1}$ .

Supponiamo che il modulatore lavori alla frequenza di campionamento  $F_s$  processando segnali a banda limitata da  $f_{\max}$ , con  $f_{\max} \ll F_s$ .

Ricordiamo da Sezione 4.3.1 che il rumore di quantizzazione delle componenti armoniche con frequenze comprese tra  $f$  e  $f + df$  è  $\frac{\sigma_e^2}{F_s} df$ . Dopo l'applicazione del filtro passa-alto, tale rumore risulta essere  $4 \sin^2 \left( \frac{\pi f}{F_s} \right) \frac{\sigma_e^2}{F_s} df$ . Se infine applichiamo al segnale  $y(n)$  un filtro passa-basso con frequenza di taglio  $f_{\max}$ , la potenza complessiva del rumore granulare risulta allora:

$$\int_{-f_{\max}}^{f_{\max}} 4 \sin^2 \left( \frac{\pi f}{F_s} \right) \frac{\sigma_e^2}{F_s} df \approx \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{2f_{\max}}{F_s} \right)^3 \sigma_e^2.$$

Il rapporto potenza del segnale-potenza del rumore viene dunque migliorato dal modulatore (e dal filtro passa-basso in uscita), di un fattore  $\frac{3}{\pi^2} \left( \frac{F_s}{2f_{\max}} \right)^3$ . In termini di decibel, si ottiene:

**Fatto 8.2.** Il modulatore SDM di ordine 1 produce un miglioramento del rapporto segnale-rumore SQNR di  $30 \log_{10} \frac{F_s}{2f_{\max}} - 5$  dB.

Si può ottenere una ulteriore diminuzione del rumore di quantizzazione aumentando l'ordine del modulatore. Per modulatori di ordine  $N$  la trasformata zeta  $Y(z)$  dell'uscita vale:

$$Y(z) = X(z) + E(z)(1 - z^{-1})^N$$

La riduzione complessiva del rumore di quantizzazione è data dal seguente

**Fatto 8.3.** Il modulatore SDM di ordine  $N$  produce un miglioramento del rapporto segnale-rumore SQNR di  $10(2N + 1) \log_{10} \frac{F_s}{2f_{\max}} + 10 \log_{10}(2N + 1) - 20N \log_{10} \pi$  dB.

Indipendentemente dall'ordine del modulatore, si può osservare che il filtro passa-alto abbatte le componenti in frequenza all'interno della banda limitata da  $f_{\max}$  ma esalta le componenti esterne a tale banda. E' necessario rimuovere tale rumore con un ulteriore filtro passa-basso; per le alte frequenze in gioco, si preferisce ottenere questo risultato mediante il filtro contenuto in un decimatore, cosa che offre l'ulteriore vantaggio di ridurre la frequenza al tasso di Nyquist  $2f_{\max}$ . Il sistema ADC complessivo è mostrato in Figura 8.26.

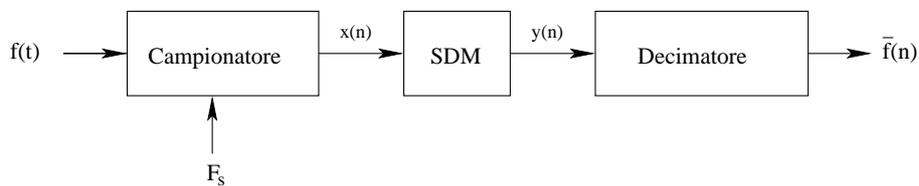


Figura 8.26 Sistema ADC complessivo.

L'operazione di decimazione trasforma il segnale binario  $y(n)$  a frequenza  $F_s$  in un segnale quantizzato con  $m$  bit a frequenza  $2f_{\max}$ . La effettiva lunghezza di parola  $m$  del convertitore è quella equivalente alla risoluzione ottenibile con il miglioramento in SQNR offerto dal modulatore e dalla decimazione.

#### Esempio 8.4.4.

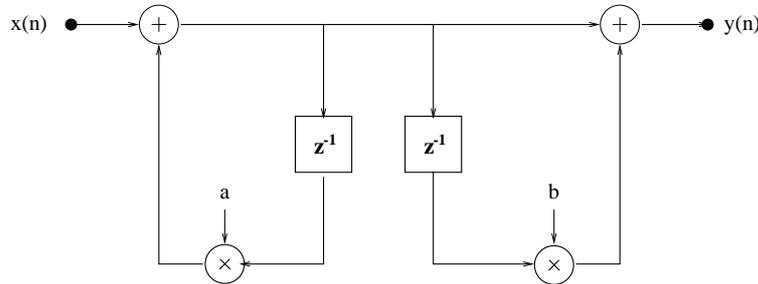
Un sistema audio per il trattamento di segnali con frequenze 0 – 20 KHz è basato su tecniche di sovracampionamento ed utilizza un SDM del secondo ordine. Il segnale analogico viene trasformato prima in una corrente di bit a una frequenza di 3 MHz e poi, con un processo di decimazione, in un segnale multibit a una frequenza di 48 KHz. Determinare, in bit, la risoluzione del convertitore.

Se il tasso di Nyquist è di 48 KHz, campionando a 3 MHz si ha un tasso di sovracampionamento pari a  $\frac{3 \times 10^6}{48 \times 10^3} = 62.5$ . Il miglioramento in SQNR offerto da un SDM di ordine 2 è pari a  $50 \log_{10} 62.5 - 12 \approx 76$  dB. Un ADC con risoluzione di  $m$  bit, lavorando al tasso di Nyquist ha un SQNR pari a  $6m + 1.7$ ; ipotizzando che il miglioramento in SQNR sia dovuto essenzialmente al modulatore, la risoluzione  $m$  è ottenuta risolvendo l'equazione  $6m + 1.7 = 76$ , ciò che comporta  $m = 12$  bit.

#### 8.4.4 Sintesi di Reti

Abbiamo visto che ad ogni rete  $R$  è associata un'unica funzione  $H_R(z)$  razionale in  $z^{-1}$ : ogni rete realizza dunque un filtro digitale, generalmente IIR.

Lo stesso filtro può essere realizzato tuttavia con reti diverse. Ad esempio la rete in Figura 8.17 e la rete in Figura 8.27 realizzano lo stesso filtro: la rete specifica dunque non solo il filtro, ma anche il particolare hardware usato per la sua realizzazione.



**Figura 8.27** Rete che realizza il filtro IIR specificato dall'equazione  $y(n) = ay(n-1) + x(n) + bx(n-1)$ .

Affrontiamo ora il problema di costruire una rete che realizzi un filtro digitale specificato o dall'equazione alle differenze o, equivalentemente, dalla sua funzione di trasferimento.

Una prima soluzione è data dalle cosiddette *forme dirette I e II*, che estendono al caso generale le reti presentate in Figura 8.17 e in Figura 8.27, introdotte e discusse alla fine del Capitolo 1.

Altre tecniche per la costruzione di reti che realizzano filtri digitali sono basate su regole composizionali presentate in Sezione 8.4.2. A scopo esemplificativo, mostriamo come si possa dare una decomposizione in cascata per filtri FIR e una in parallelo per filtri IIR.

La base matematica su cui poggia la decomposizione in cascata di un filtro FIR è data dal seguente:

**Fatto 8.4.** *Un qualsiasi polinomio a coefficienti reali può essere decomposto come prodotto di polinomi di primo e di secondo grado a coefficienti reali.*

*Dimostrazione.* Sia  $p(z) = \sum_{k=0}^{L-1} a_k z^k$  un polinomio a variabile complessa con coefficienti  $a_k$  reali. Per il teorema fondamentale dell'algebra sappiamo che:

$$p(z) = A \prod_{k=0}^{L-1} (z - z_k),$$

dove  $z_1, \dots, z_{L-1}$  sono soluzioni (non necessariamente reali) dell'equazione  $p(z) = 0$  e  $A$  una costante. Fissato  $z_k$ , si hanno due casi:

1.  $z_k$  è reale; allora  $z - z_k$  è un polinomio di primo grado a coefficienti reali che appare nella decomposizione;
2.  $z_k$  è complesso; allora il coniugato  $z_k^*$  di  $z_k$  è a sua volta una soluzione dell'equazione  $p(z) = 0$  poiché

$$0 = p(z_k) = p(z_k)^* = \left( \sum_{j=0}^{L-1} a_j z_k^j \right)^* = \sum_{j=0}^{L-1} a_j^* (z_k^*)^j = \sum_{j=0}^{L-1} a_j (z_k^*)^j = p(z_k^*).$$

Allora  $(z - z_k)(z - z_k^*) = z^2 - 2\operatorname{Re}\{z_k\}z + |z_k|^2$  è un polinomio di secondo grado a coefficienti reali che appare nella decomposizione.

□

Dato allora un filtro FIR, caratterizzato da una funzione di trasferimento  $H(z)$  che è un polinomio in  $z^{-1}$ , per il risultato precedente si può scrivere che:

$$H(z) = AH_1(z) \cdots H_m(z),$$

dove  $H_k(z)$  è un polinomio in  $z^{-1}$  di primo o di secondo grado a coefficienti reali ( $1 \leq k \leq m$ ). Una rete  $R$  che realizza il filtro FIR può essere ottenuta dalla composizione in cascata di reti  $R_1, \dots, R_m$ , dove  $R_k$  è la rete in forma diretta I o in forma diretta II che realizza il filtro con funzione di trasferimento  $H_k(z)$ .

Un filtro IIR è invece caratterizzato da una funzione di trasferimento  $H(z)$  razionale in  $z^{-1}$ . Nell'ipotesi che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore di  $H(z)$ , possiamo decomporre  $H(z)$  in frazioni parziali  $H_1(z), \dots, H_m(z)$ , con numeratori e denominatori a coefficienti reali e denominatori di grado al più 2:

$$H(z) = AH_1(z) + \cdots + H_m(z).$$

Una rete  $R$  che realizza il filtro IIR può essere allora ottenuta dalla composizione in parallelo di reti  $R_1, \dots, R_m$ , dove  $R_k$  è la rete in forma diretta I o in forma diretta II che realizza il filtro con funzione di trasferimento  $H_k(z)$ .

### 8.4.5 Rumore nel Disegno di Filtri Digitali

Il trattamento di segnali analogici mediante sistemi digitali richiede di approssimare numeri reali con numeri che siano rappresentabili con un numero finito di bit: questo fatto forza l'introduzione di errori ineliminabili con cui bisogna imparare a convivere. Presentiamo qui una breve rassegna sui diversi tipi di errori che si vengono a creare nella realizzazione di filtri mediante sistemi digitali; si analizzeranno in particolare gli errori dovuti alla quantizzazione dei coefficienti che entrano nella specifica del filtro.

- *Rumore per quantizzazione del segnale.*

Abbiamo visto che tutti i convertitori analogico-digitale modificano il segnale di ingresso, introducendo quindi un errore di quantizzazione. Nei convertitori analogico-digitale basati su campionamento alla frequenza di Nyquist e quantizzatore a  $n$  bit, tale errore può creare un rumore ineliminabile detto *rumore granulare del quantizzatore*: esso può essere misurato in dB di rapporto segnale-rumore, e tale valore è proporzionale al numero  $n$  di bit del segnale in uscita ( $\approx 6n$ ). Per convertitori basati su sovra-campionamento e delta-modulazione, il rumore introdotto è legato alle caratteristiche del modulatore e dei filtri che realizzano il convertitore.

- *Rumore per quantizzazione dei coefficienti.*

Un filtro digitale FIR o IIR viene specificato attraverso l'algoritmo (o attraverso la rete) che lo realizza: le operazioni di moltiplicazione per costante richiedono a loro volta l'assegnazione di opportuni coefficienti reali, visti come parametri. L'implementazione dell'algoritmo su un processore con parola di lunghezza fissa (tipicamente 16 o 32 bit), pone dei limiti all'accuratezza con cui possono essere specificati i parametri: viene quindi introdotto un errore, detto *errore di quantizzazione dei coefficienti*, per cui il filtro implementato non coincide in generale con quello specificato. Discuteremo in seguito in maggior dettaglio gli effetti di tale tipo di errore; vogliamo qui ricordare brevemente:

1. Gli effetti della quantizzazione dei coefficienti dipendono dall'aritmetica di macchina del processore su cui il filtro è implementato: la rappresentazione in virgola fissa è generalmente più sensibile a tali errori, a causa della propagazione dell'errore nella moltiplicazione. Su DSP (Digital Signal Processor) a 32 bit o più, con rappresentazione in virgola mobile, questo tipo di errore può invece essere trascurato.
  2. I filtri IIR sono più sensibili dei filtri FIR all'errore di quantizzazione dei coefficienti, a causa della struttura intrinsecamente ricorsiva dei filtri IIR.
  3. Lo stesso filtro può essere realizzato con diverse architetture di rete: la sensibilità all'errore di quantizzazione dei coefficienti è fortemente dipendente dal tipo di rete realizzata. Ad esempio, la sensibilità all'errore di reti che realizzano un filtro in forma diretta è generalmente più alta rispetto alle reti che realizzano lo stesso filtro in forma di cascata o parallelo.
- *Rumore per troncamento.*

L'implementazione di un algoritmo che realizza un filtro digitale richiede l'esecuzione di varie operazioni di somma e prodotto. Ipotizziamo di utilizzare una rappresentazione in virgola fissa. Anche se l'ingresso, l'uscita e i coefficienti del filtro sono numeri rappresentabili con  $n$  bit, mantenere nei calcoli questa accuratezza richiede una precisione maggiore poiché, tipicamente, la moltiplicazione di due numeri di  $n$  bit produce un numero rappresentabile con  $2n$  bit. La necessità di arrotondare i risultati intermedi produce quindi un errore detto *rumore di troncamento*.

Una delle tecniche per controllare l'errore di troncamento è quella di spostare l'operazione di arrotondamento il più possibile nella parte finale del calcolo. A tal riguardo, risulta molto utile implementare un filtro digitale su processori che, lavorando con parole di  $n$  bit, hanno registri come l'accumulatore (ACC) o il prodotto (P) di dimensione doppia, cioè  $2n$  bit. Ad esempio, un filtro FIR può essere implementato usando la sottoprocedura:

```

Subroutine FILTRO
    ⋮
    P ←  $a_{k-1}x(n - (k - 1))$ 
    ACC ← ACC + P
    P ←  $a_kx(n - k)$ 
    ACC ← ACC + P
    ⋮
fine

```

La precisione a  $2n$  bit viene mantenuta durante l'esecuzione della Subroutine, che agisce sui registri ACC e P di  $2n$  bit, e solo alla fine il risultato viene troncato per essere memorizzato in  $n$  bit. L'errore di troncamento è allora limitato al bit meno significativo del numero memorizzato: il rapporto segnale-rumore di troncamento si mantiene quindi intorno agli  $n$  dB.

Analizziamo ora più in dettaglio l'effetto prodotto su un filtro digitale dall'errore di quantizzazione dei coefficienti. Abbiamo visto che un filtro è caratterizzato dai poli e dagli zeri della sua funzione di trasferimento  $H(z^{-1})$ : la modifica dei coefficienti che specificano

il filtro, causata dall'errore di quantizzazione, provoca a sua volta un cambiamento nella posizione dei poli e degli zeri, che sono responsabili del comportamento del filtro.

La situazione è particolarmente delicata per i filtri IIR: i poli di un filtro IIR, correttamente progettato, possono eventualmente spostarsi al di fuori del cerchio unitario, a causa dell'errore di quantizzazione dei coefficienti, rendendo il filtro instabile.

Studiamo ora in maniera quantitativa questo fenomeno, valutando la sensitività dei poli rispetto al cambiamento dei coefficienti. A questo riguardo, sia  $D(z^{-1})$  il denominatore della funzione di trasferimento razionale  $H(z^{-1})$  di un filtro IIR: esprimendo  $D(z^{-1})$  in forma di polinomio e in forma fattorizzata, si ha:

$$D(z^{-1}) = 1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1}),$$

dove  $a_1, \dots, a_M$  individuano i coefficienti del polinomio e  $z_1, \dots, z_M$  ne sono gli zeri, individuando di conseguenza i poli di  $H(z^{-1})$ .

Supponiamo ora che la quantizzazione dei coefficienti  $a_1, \dots, a_M$  porti ad un nuovo filtro, caratterizzato da nuovi coefficienti  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_M$  tali che:

$$\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k \quad (1 \leq k \leq M),$$

dove  $\Delta a_k$  è l'errore di quantizzazione. Il nuovo polinomio avrà nuovi zeri  $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_M$ , che risulteranno i poli della funzione di trasferimento del nuovo filtro.

Posto  $\Delta z_k = \hat{z}_k - z_k$ ,  $\Delta z_k$  può essere interpretato come errore di localizzazione del polo  $z_k$ ; si può facilmente derivare la relazione:

$$\Delta z_k \approx \frac{\sum_{j=1}^M z_k^{M-j} \Delta a_j}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)}, \quad (1 \leq k \leq M).$$

Questa formula esprime la sensitività dei poli rispetto agli errori di quantizzazione  $\Delta a_1, \dots, \Delta a_M$ .

Osservando che l'errore di localizzazione  $\Delta z_k$  del polo  $z_k$  è tanto più elevato quanto più  $\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)$  è vicino a 0, concludiamo:

- a parità di ordine  $M$ , i filtri i cui poli si raggruppano in poche classi di piccole dimensioni sono i più sensibili agli errori di quantizzazione dei coefficienti;
- filtri stabili di ordine  $M$  contengono  $M$  poli nel cerchio unitario: "grandi" valori di  $M$  forzeranno alcuni poli ad essere necessariamente "vicini". I filtri di ordine elevato risulteranno allora generalmente più sensibili all'errore di quantizzazione dei coefficienti che non i filtri di ordine basso;
- le reti in forma di cascata o in parallelo realizzano separatamente ogni coppia di poli complessi coniugati. Questo è il motivo per cui le forme in cascata o parallelo sono meno sensibili all'errore di quantizzazione dei coefficienti che non le forme dirette.



## PROCESSI STOCASTICI E LORO CARATTERISTICHE SPETTRALI

Un segnale deterministico è caratterizzato da una “traiettoria” predefinita che attraversa il tempo e lo spazio. In altri termini, le fluttuazioni del segnale sono completamente descritte da una relazione funzionale che consente di ricavare il valore esatto ad ogni istante di tempo passato, presente e futuro. Sfortunatamente, la realizzazione di segnali deterministici richiede di poter esplicitare parametri la cui conoscenza è molto costosa o addirittura impossibile.

Per questo motivo si ricorre a segnali *probabilistici* (o *casuali*) che sono invece caratterizzati da fluttuazioni imprevedibili e per i quali non è possibile formulare una funzione che consenta di predire con esattezza i valori futuri a partire dalla storia passata.

Va tuttavia ricordato che la stocasticità è alla base della nozione di informazione; i segnali che convogliano informazione sono infatti i segnali casuali e non deterministici, per i quali l’informazione convogliata risulta nulla. Molta parte dell’attività nell’ambito delle telecomunicazioni o dell’elaborazione del parlato, del suono, video ecc., è relativa all’estrazione di informazione da segnale rumoroso, corrotto cioè da rumore intrinsecamente generato dal mezzo trasmissivo o dagli apparati coinvolti.

Un modello per i segnali probabilistici che risulta utile per descrivere un fenomeno aleatorio in evoluzione nel tempo è quello di *processo stocastico*. Tale nozione viene introdotta nel primo paragrafo in cui è data la definizione di processo stocastico in termini di famiglia

di segnali  $\{X(t, r)\}$ , a tempo discreto o continuo, in cui l'indice  $r$  varia sullo spazio delle possibili realizzazioni, dotato di una misura di probabilità. Si introduce altresì il concetto di media temporale e spaziale; vengono poi discusse alcune statistiche come la media, la varianza, l'autocorrelazione e la correlazione incrociata.

Il secondo paragrafo è dedicato allo studio dei processi stazionari. Le proprietà della funzione di autocorrelazione sono applicate alla progettazione di algoritmi per la stima di ritardo temporale.

Il terzo paragrafo introduce la nozione di sistema ergodico; viene in particolare segnalato come una stima della media e della funzione di autocorrelazione possa essere ottenuta mediante la media e l'autocorrelazione temporale.

L'ultimo paragrafo presenta alcuni elementi di analisi in frequenza di processi stocastici stazionari. Si introduce lo spettro di potenza di un segnale casuale, che descrive il contributo delle varie frequenze alla potenza media complessiva; si mostra infine come esso risulti la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale casuale.

## 9.1 Processi Stocastici

Se proviamo a pronunciare varie volte una parola, per esempio "arpa", si può osservare che i segnali ottenuti per veicolare la parola sono in generale diversi; ogni possibile segnale ottenuto dalla ripetizione di questo esperimento verrà chiamato *realizzazione* della parola. Non possiamo dunque modellare il segnale corrispondente ad "arpa" attraverso un segnale deterministico, in quanto diverse realizzazioni della parola portano a diversi segnali: possiamo elencare tutte le possibili realizzazioni solo in linea di principio, e per denotarle, le indicizziamo con la variabile  $r$ . Denoteremo con  $f(t, r)$  il segnale deterministico corrispondente alla realizzazione  $r$ .

Una modellazione più precisa può essere ottenuta associando ulteriormente all'insieme delle realizzazioni una misura di probabilità. Questa può essere introdotta come segue:

- Se l'insieme delle realizzazioni  $\{r_1, \dots, r_m\}$  è finito, si associa ad ogni realizzazione  $r_i$  la sua probabilità  $p(r_i)$ :

$$p(r_i) = \Pr [r_i].$$

Naturalmente, vale che  $0 \leq p(r_i) \leq 1$  e  $\sum_{i=1}^m p(r_i) = 1$ .

- Se l'insieme delle realizzazioni è infinito, si può considerare la probabilità  $dP(t, \gamma)$  che un segnale preso a caso abbia al tempo  $t$  un valore compreso tra  $\gamma$  e  $\gamma + d\gamma$ :

$$dP(t, \gamma) = \Pr [\gamma \leq f(t, r) \leq \gamma + d\gamma].$$

Vale che  $\int_{-\infty}^{+\infty} dP(t, \gamma) = 1$ .

Questo porta alla nozione di *processo stocastico*.

**Definizione 9.1.** *Un processo stocastico  $\{X(t, r)\}_{t \in T}$  è una famiglia di variabili aleatorie indicizzate con un parametro  $t \in T$  (tempo). Se  $T \subseteq \mathbb{R}$  il processo è detto a tempo continuo, se  $T \subseteq \mathbb{Z}$  è detto a tempo discreto;  $r$  individua una particolare realizzazione del processo stocastico.*

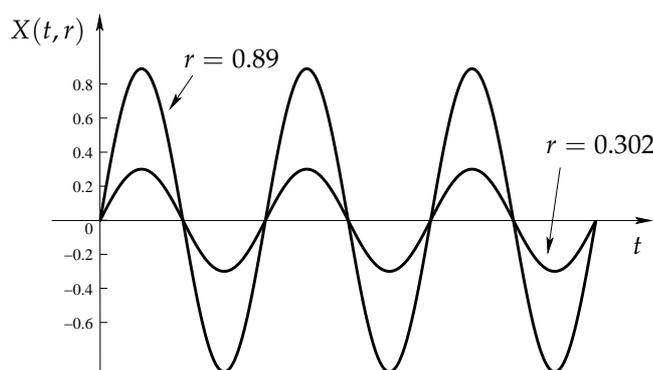
Per questioni di semplicità notazionale, spesso denoteremo il processo stocastico direttamente con  $X(t)$ , sottintendendo la variabile che individua la particolare realizzazione.

**Esempio 9.1.1.**

Il processo

$$X(t, r) = r \sin \omega_0 t,$$

con  $r$  uniformemente distribuito nell'intervallo  $[0, 1]$ , è un semplice esempio di processo stocastico a tempo continuo. Tutte le realizzazioni sono sinusoidi di fissata frequenza  $\omega_0$ ; le realizzazioni differiscono per l'ampiezza  $r$ . La Figura 9.1 mostra due differenti realizzazioni del processo.

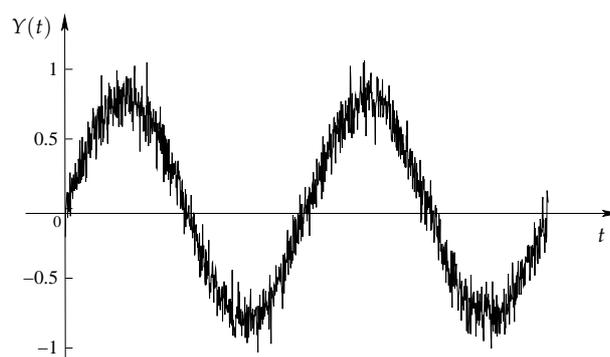


**Figura 9.1** Due realizzazioni distinte del processo  $X(t, r) = r \sin \omega_0 t$ , con  $r = 0.89$  e  $r = 0.302$ .

Se, a partire dal processo precedente, vogliamo modellare il processo che descrive l'onda sinusoidale mostrata da un'oscilloscopio e disturbata da rumore additivo  $N(t)$  di origine gaussiana, ricaviamo:

$$Y(t, r) = r \sin \omega_0 t + N(t).$$

La Figura 9.2 illustra una realizzazione in cui la variabile aleatoria  $N(t)$  ha una distribuzione gaussiana con media 0 e deviazione standard 0.1.



**Figura 9.2** Realizzazione del processo  $Y(t) = 0.79 \sin \omega_0 t + N(t)$ . La variabile  $N(t) \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$ .

È opportuno osservare che un processo stocastico può essere visto in due modi diversi.

1. Fissata la realizzazione  $r_0$ ,  $x(t, r_0) = X(t, r_0)$  risulta essere un segnale deterministico; si noti l'uso della minuscola  $x(t, r_0)$  (o anche  $x(t)$ ) per denotare il segnale corrispondente ad una data realizzazione. L'insieme delle realizzazioni è spesso chiamato

spazio delle fasi o spazio delle realizzazioni o, in inglese, *ensemble*. La Figura 9.3 illustra un esempio di processo, evidenziando alcune realizzazioni.

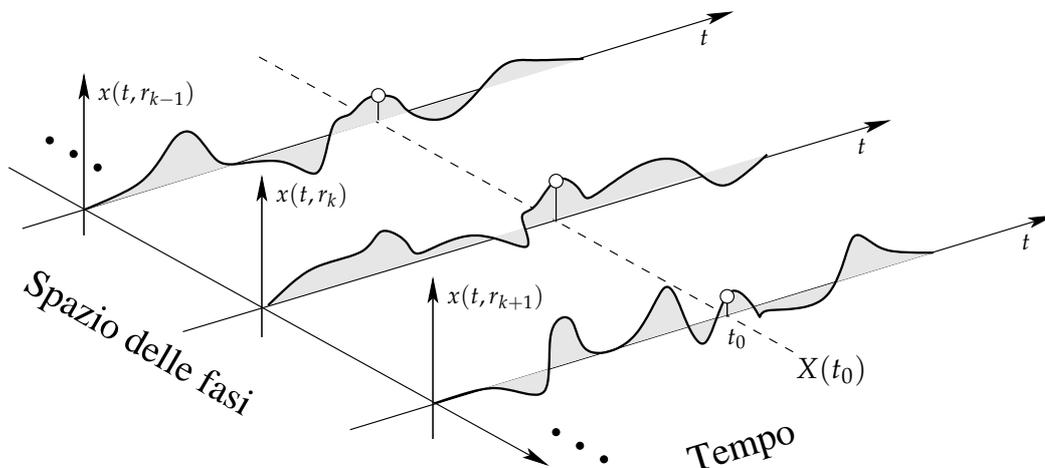


Figura 9.3 Alcune realizzazioni di un processo stocastico avente spazio delle fasi numerabile.

2. Fissato il tempo  $t_0$ ,  $X(t_0, r)$  risulta essere una variabile aleatoria; come detto, spesso denoteremo con  $X(t)$  detta variabile, tralasciando di esplicitare la realizzazione  $r$  e il tempo di osservazione  $t_0$ . In Figura 9.3 sono evidenziati alcuni valori assunti dalla variabile  $X(t_0)$  all'istante di osservazione  $t_0$ .

Per ogni  $t$ , chiameremo *media di fase* o *valor medio* l'aspettazione  $E[X(t)]$  della variabile aleatoria  $X(t)$ . Si noti che la media di fase è una funzione  $M_X(t)$  di  $t$ .

Richiamando la definizione di aspettazione, se le realizzazioni sono finite o discrete e  $p(r)$  è la probabilità della realizzazione  $r$ , allora:

$$E[X(t)] = \sum_r X(t, r)p(r).$$

Se le realizzazioni sono su un insieme continuo e

$$dP(t, \gamma) = f_X(t, \gamma) d\gamma = \Pr\{\gamma \leq X(t, r) < \gamma + d\gamma\},$$

allora:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma f_X(t, \gamma) d\gamma.$$

### Esempio 9.1.2.

Se consideriamo il processo a tempo discreto  $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  relativo al valore delle azioni di Google quotata presso il Nasdaq in istanti di tempo prefissati (per es. all'apertura di contrattazione giornaliera), possiamo cogliere meglio questo fondamentale doppio punto di vista insito nel concetto di processo.

- Da un lato, fissato  $n = n_0$ , possiamo avere informazione sul valor medio o sulla deviazione standard della variabile  $X(n_0)$  caratterizzata dalla funzione densità di probabilità  $f_X(n_0, x)$ .

- Dall'altro, possiamo osservare una realizzazione (per es. in un anno), già accaduta o che può potenzialmente accadere, di dimensione  $m$ , cioè una sequenza specifica di valori  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , da cui calcolare la media o la varianza temporale.

### 9.1.1 Caratterizzazione Statistica di un Processo

Se si considerano diversi istanti di tempo  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , si ottiene il vettore aleatorio  $\mathbf{X}(t) = [X(t_1), \dots, X(t_n)]$  la cui *descrizione statistica completa* è data dalla distribuzione di probabilità di ordine  $N$  del processo

$$F_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \Pr [X(t_1) \leq \gamma_1, \dots, X(t_n) \leq \gamma_n]. \quad (9.1)$$

Si noti che la (9.1) può essere definita per ogni  $n$ -pla di tempi  $t_i$  e per ogni  $n$ -pla di valori  $\gamma_i$ , per questo motivo è definita come funzione di entrambe le  $n$ -ple di variabili.

Sono ovviamente possibili delle descrizioni alternative alla famiglia di distribuzioni congiunte che si ottiene al variare di  $n$ . In particolare, se ogni  $n$ -pla di variabili aleatorie estratte dal processo corrisponde ad un vettore aleatorio continuo, possiamo definire la famiglia delle densità di probabilità

$$f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \frac{\partial^N F_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n)}{\partial \gamma_1 \dots \partial \gamma_n} \quad (9.2)$$

Se, in alternativa, ogni  $n$ -pla di variabili aleatorie estratte dal processo costituisce un vettore aleatorio discreto, che assume con probabilità 1 valori in un insieme discreto  $\mathcal{A}$ , allora possiamo definire la famiglia di distribuzioni di massa

$$p_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \Pr [X(t_1) = \gamma_1, \dots, X(t_n) = \gamma_n]. \quad (9.3)$$

In definitiva, dunque, un processo aleatorio viene completamente descritto dal punto di vista statistico se si specifica la descrizione statistica di ogni vettore che si ottiene estraendo da esso una  $n$ -pla qualsiasi di variabili aleatorie. Dovrebbe essere chiaro che se è nota la descrizione statistica completa, siamo in grado di caratterizzare dal punto di vista statistico il processo aleatorio e quindi la classe di segnali che il processo modella.

Specificare la descrizione statistica completa tramite l'intera famiglia delle distribuzioni risulta, in molti casi, un compito difficile se non impossibile, per il fatto che non sempre è possibile produrre modelli accurati per i segnali in un sistema. In molte applicazioni ci si accontenta allora di una descrizione statistica parziale, ovvero limitata alla distribuzione del secondo ordine o, ancor più semplicemente, basata sui primi due momenti delle variabili coinvolte richiamati nella seguente:

**Definizione 9.2.** Dato un processo  $X(t)$ , il valor medio  $M_X(t)$ , la varianza  $V_X(t)$  e la funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(t, s)$  sono definiti rispettivamente da:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[X(t)] \\ V_X(t) &= E[(X(t) - M_X(t))^2] \\ R_{XX}(t, s) &= E[X(t)X(s)], \end{aligned}$$

dove  $t$  e  $s$  sono du tempi appartenenti all'insieme di indici su cui è definito il processo. Dati due processi  $X(t)$  e  $Y(t)$ , la funzione di crosscorrelazione  $R_{XY}(t, s)$  è data da:

$$R_{XY}(t, s) = E[X(t)Y(s)].$$

La media del processo aleatorio fornisce, per ogni istante  $t$ , la media statistica della variabile  $X(t)$  e quindi dà informazioni sul valor medio delle realizzazioni del processo ad un certo istante. L'autocorrelazione e la crosscorrelazione forniscono invece informazioni sulla media del prodotto dei campioni delle realizzazioni dei processi (o all'interno dello stesso processo) in due istanti prefissati.

### Esempio 9.1.3.

Dato il processo stocastico

$$X(t) = \alpha \sin \omega_0 t + \beta \cos \omega_0 t,$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono variabili aleatorie indipendenti e uniformi in  $[0, 1]$ , calcolarne la media e l'autocorrelazione.

Il valore atteso è:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[\alpha \sin \omega_0 t + \beta \cos \omega_0 t] \\ &= E[\alpha] \sin \omega_0 t + E[\beta] \cos \omega_0 t = 0.5(\sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t), \end{aligned}$$

dove 0.5 è il valore atteso delle variabili  $\alpha$  e  $\beta$  definite su  $[0, 1]$ , visto che in generale il valore atteso di una variabile casuale distribuita uniformemente su un intervallo  $[a, b]$  è  $(b - a)/2$ .

La funzione di autocorrelazione risulta:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, s) &= E[(\alpha \sin \omega_0 t + \beta \cos \omega_0 t)(\alpha \sin \omega_0 s + \beta \cos \omega_0 s)] \\ &= E[\alpha^2] \sin \omega_0 t \sin \omega_0 s + E[\beta^2] \cos \omega_0 t \cos \omega_0 s + E[\alpha\beta] \sin \omega_0(t + s) \\ &= \frac{1}{3} \cos \omega_0(t - s) + \frac{1}{4} \sin \omega_0(t + s), \end{aligned}$$

essendo il valor medio del quadrato di una variabile casuale distribuita uniformemente su un intervallo  $[a, b]$  dato da  $E[\alpha^2] = (b^3 - a^3)/(3(b - a))$  e il valore atteso  $E[\alpha\beta] = E[\alpha]E[\beta]$  per l'indipendenza. Se poniamo  $s = t + \tau$  abbiamo:

$$R_{XX}(t, t + \tau) = \frac{1}{3} \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{4} \sin \omega_0(2t + \tau).$$

Due processi aleatori  $X(t)$  e  $Y(s)$  sono detti *indipendenti* se, per ogni  $t$  e  $s$ , le variabili aleatorie  $X(t)$  e  $Y(s)$  sono indipendenti; in tal caso la distribuzione di probabilità congiunta può essere fattorizzata come segue:

$$F_{XY}(t, s; \gamma_1, \gamma_2) = F_X(t; \gamma_1)F_Y(s; \gamma_2).$$

È immediato verificare che se due processi sono indipendenti sono anche *scorrelati*, cioè anche la funzione di crosscorrelazione fattorizza:

$$R_{XY}(t, s) = E[X(t)Y(s)] = E[X(t)]E[Y(s)].$$

Occorre precisare anche che i processi indipendenti sono scorrelati, mentre non è in generale vero il viceversa.

**Esempio 9.1.4.**

Si consideri un processo  $Y(t) = X(t) + N(t)$ , ottenuto sommando ad un processo  $X(t)$ , a media  $M_X$  e varianza  $V_X$ , un rumore  $N(t)$  a media 0 e varianza  $V_N$ . Il processo  $Y(t)$  ha media  $M_Y(t) = M_X(t)$  e, se  $X(t)$  e  $N(t)$  sono scorrelati, varianza  $V_Y(t) = V_X(t) + V_N(t)$ . Infatti:

$$M_Y(t) = E[X(t) + N(t)] = E[X(t)] + E[N(t)] = M_X(t),$$

$$\begin{aligned} V_Y(t) &= E[(Y(t) - M_Y(t))^2] = E[(X(t) + N(t) - M_X(t))^2] \\ &= E[(X(t) - M_X(t))^2] + 2E[N(t)(X(t) - M_X(t))] + E[N^2(t)] \\ &= V_X(t) + 2E[N(t)]E[X(t) - M_X(t)] + V_N(t) \\ &= V_X(t) + V_N(t). \end{aligned}$$

## 9.2 Processi Stocastici Stazionari

Nella sezione precedente abbiamo visto che i parametri statistici che caratterizzano un processo, come ad esempio la sua media o la sua autocorrelazione, dipendono in generale dall'istante di osservazione. In molte applicazioni non ha tuttavia senso specificare esattamente l'istante in cui ha inizio l'osservazione del fenomeno: ci si può aspettare ad esempio che il rumore presente in un sistema di trasmissione (anch'esso modellato tramite un processo aleatorio) presenti delle caratteristiche in larga parte indipendenti dal tempo. Se si misura il rumore in questo istante oppure fra qualche ora, ci si aspetta di ritrovare gli stessi valori, almeno fintanto che le condizioni di misura e il sistema che fornisce la relazione ingresso-uscita rimangono gli stessi.

In questa sezione forniremo la definizione del concetto di invarianza dei parametri statistici rispetto al tempo di osservazione mediante la nozione di stazionarietà di un processo stocastico.

Informalmente, diremo che un processo stocastico  $X(t)$  è *stazionario in senso stretto* se tutti i suoi parametri statistici sono tempo-invarianti. Ciò significa che per ogni  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $\tau \in \mathbb{R}$ :

$$\Pr[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n] = \Pr[X(t_1 + \tau) \leq x_1, \dots, X(t_n + \tau) \leq x_n].$$

o, equivalentemente

$$F_X(t_1, \dots, t_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = F_X(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau; \gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Osservando attentamente l'espressione precedente, ci si accorge che i processi  $X(t)$  e  $X(t + \tau)$  hanno la stessa caratterizzazione statistica, suggerendo quindi l'idea che non ha più importanza l'inizio dei tempi di osservazione. Infatti la proprietà di invarianza mette in luce quell'aspetto che dice che la famiglia di distribuzioni associata ad un processo stazionario dipende solamente dalla differenza dei tempi di osservazione e non da un istante di riferimento  $t_0$ . Ne consegue che tutte le statistiche, tra cui media, varianza e autocorrelazione, sono tempo-invarianti.

Un esempio di processo stazionario a tratti e non stazionario nel complesso è offerto in Figura 9.4: i parametri statistici non cambiano nei rispettivi blocchi, ma cambiano in modo evidente nel confronto tra i due blocchi.

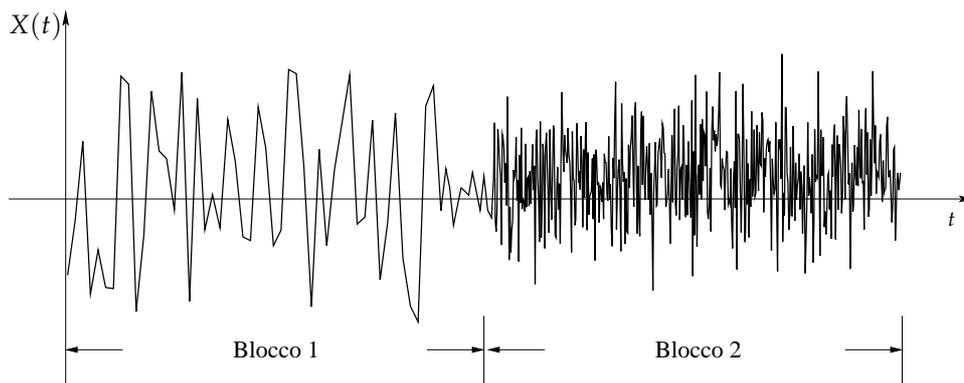


Figura 9.4 Processo non stazionario.

La nozione di stazionarietà qui richiamata richiede la conoscenza delle distribuzioni congiunte di vettori aleatori di ordine  $N$  per tutti gli  $N$  possibili; nel seguito faremo riferimento ad una nozione di stazionarietà meno restrittiva, cioè quella riferita alle distribuzioni di ordine due.

In termini più formali, si richiede che

$$F_X(t_1, t_2; \gamma_1, \gamma_2) = F_X(t_1 + \tau, t_2 + \tau; \gamma_1, \gamma_2).$$

per ogni valore di  $t_1, t_2$  e  $\tau$ . Ponendo  $\tau = -t_1$  si ottiene

$$F_X(t_1, t_2; \gamma_1, \gamma_2) = F_X(0, t_2 - t_1 + \tau; \gamma_1, \gamma_2)$$

facendo dipendere la distribuzione solamente dalla differenza degli istanti di osservazione. Come conseguenza la media di fase diviene

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma f_X(t; \gamma) d\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma f_X(0; \gamma) d\gamma = M_X,$$

rendendola costante e quindi indipendente dal tempo. Per la correlazione, presi due istanti di tempo  $t$  e  $t + \tau$ , si ha:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1 \gamma_2 f_X(t, t + \tau; \gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1 \gamma_2 f_X(0, \tau; \gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\ &= R_{XX}(\tau), \end{aligned}$$

che dimostra che in caso di stazionarietà del secondo ordine, la funzione di autocorrelazione dipende solamente dalla differenza dei tempi di osservazione.

Queste due ultime derivazioni costituiscono, nella pratica, la forma (debole) di stazionarietà richiesta nella gran parte delle applicazioni, come riportato nella seguente

**Definizione 9.3.** Un processo stocastico  $X(t)$  è detto stazionario (in senso lato) se la media e la funzione di autocorrelazione sono tempo invarianti:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= M_X = \text{costante}, \\ E[X(t_1)X(t_2)] &= R_{XX}(t_1 - t_2), \quad (\text{per ogni } t_1 \text{ e } t_2). \end{aligned}$$

In un processo stazionario la media di fase risulta quindi indipendente dal tempo, mentre la autocorrelazione  $E[X(t_1)X(t_2)]$  dipende solo dalla differenza  $\tau = t_1 - t_2$ . In altre parole, le proprietà dell'autocorrelazione di un processo stazionario restano invariate in media, e quindi non dipendono dall'intervallo temporale su cui vengono calcolate. Se consideriamo due blocchi di dati di dimensione  $N$ , come in Figura 9.5, ci aspettiamo che aspettazione e autocorrelazione estratte dai due blocchi siano mediamente le stesse, indipendentemente dalla distanza temporale relativa tra i blocchi.

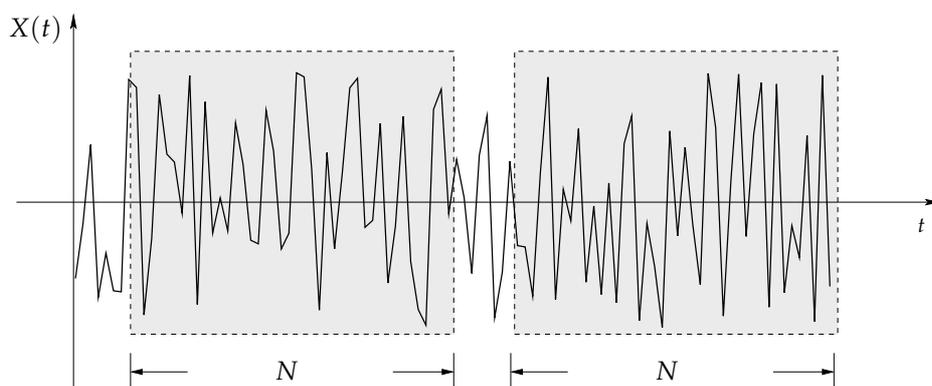


Figura 9.5 Blocchi di dati di un processo stazionario.

Analogamente diremo che due processi stocastici  $X(t)$  e  $Y(t)$  sono *congiuntamente stazionari* (in senso lato) se sono stazionari in senso lato e la funzione di cross-correlazione è tempo-invariante:

$$E[X(t)Y(t + \tau)] = R_{XY}(\tau), \quad (\text{per ogni } t \text{ e } \tau).$$

### Esempio 9.2.1.

Dato il processo  $X(t) = r \cos(\omega_0 t)$  con  $r$  distribuito uniformemente su  $[-1, 1]$ , dire se è stazionario in senso lato.

La media del processo risulta:

$$M_X(t) = E[r \cos(\omega_0 t)] = E[r] \cos(\omega_0 t) = 0,$$

dato che  $r$  è una variabile casuale a media nulla. Dunque il processo risulta stazionario in media. Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione si ha:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] = E[r^2] \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t + \tau)) \\ &= \frac{1}{3} \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t + \tau)), \end{aligned}$$

dato che il momento secondo della variabile  $r$  è  $r^2/12$ . Si può concludere che il processo non risulta essere stazionario al secondo ordine perché  $R_{XX}(t, t + \tau)$  dipende dall'istante  $t$ .

Per processi stocastici stazionari la funzione di autocorrelazione ha le seguenti proprietà:

1.  $R_{XX}(0) = E [X^2(t)]$  (media del quadrato);
2.  $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$  (simmetria);
3.  $R_{XX}(\tau) \leq R_{XX}(0)$  (massimo nell'origine).

Dimostriamo ad esempio la 3.:

$$\begin{aligned} 0 \leq E [(X(t) - X(t + \tau))^2] &= E [X^2(t)] - 2E [X(t)X(t + \tau)] + E [X^2(t + \tau)] \\ &= 2(R_{XX}(0) - R_{XX}(\tau)). \end{aligned}$$

### Esempio 9.2.2.

In questo esempio viene mostrato come sia possibile effettuare una stima di *ritardo temporale* in presenza di stazionarietà.

Consideriamo un processo  $X(t)$  stazionario generato in un punto dello spazio e ricevuto da due distinti sensori 1 e 2, posti in diverse posizioni note. Il segnale ricevuto dal sensore  $i$  è degradato da rumore additivo  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ) a media 0, inoltre  $X(t)$ ,  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$  sono scorrelati tra loro. Si vuol stimare il ritardo relativo  $D$  con cui il segnale giunge ai due sensori (cosa che permette ad esempio di determinare la direzione di provenienza del segnale).

Il sistema può essere modellato come segue:

- Il sensore 1 riceve il segnale  $Y_1(t) = aX(t) + N_1(t)$ ,
- Il sensore 2 riceve il segnale  $Y_2(t) = bX(t - D) + N_2(t - D)$ ,

dove  $a$  e  $b$  sono costanti opportune. L'obiettivo di stimare  $D$  può essere perseguito a partire da  $Y_1(t)$  e  $Y_2(t)$  o, più specificatamente, dalla funzione di cross-correlazione  $R_{Y_1Y_2}(\tau)$ :

$$\begin{aligned} R_{Y_1Y_2}(\tau) &= E [Y_1(t)Y_2(t + \tau)] \\ &= E [(aX(t) + N_1(t))(bX(t - D + \tau) + N_2(t - D + \tau))] \\ &= abE [X(t)X(t - D + \tau)] + aE [X(t)N_2(t - D + \tau)] + bE [N_1(t)X(t - D + \tau)] \\ &\quad + E [N_1(t)N_2(t - D + \tau)] \\ &= abR_{XX}(\tau - D). \end{aligned}$$

Poiché la funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(\tau)$  ha un massimo nell'origine, si può concludere:

$$D = \arg \max_{\tau} R_{Y_1Y_2}(\tau).$$

## 9.3 Medie Temporalì ed Ergodicità

Dato un processo aleatorio  $X(t, r)$ , per ogni sua realizzazione  $r$  si può definire la sua *media temporale*, che denoteremo con  $\mathcal{M}_x(r)$ :

$$\mathcal{M}_x(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, r) dt.$$

Si osservi che la media temporale è una variabile aleatoria.

In modo del tutto analogo si definisce la funzione di autocorrelazione temporale:

$$\mathcal{R}_{xx}(t, t + \tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, r) X(t + \tau, r) dt.$$

Supponiamo da ora in poi che il processo  $X(t)$  sia stazionario. Si osservi che la media temporale  $\mathcal{M}_x$    una variabile aleatoria, cos  come la funzione di autocorrelazione temporale  $\mathcal{R}_{xx}(\tau)$ , una volta fissato  $\tau$ . Possiamo calcolare allora la media di tali variabili aleatorie e, nell'ipotesi di stazionariet , si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned} E[\mathcal{M}_x] &= M_X, \\ E[\mathcal{R}_{xx}(\tau)] &= R_{XX}(\tau). \end{aligned}$$

Per molti processi accade inoltre che sia la varianza della media temporale che quella della funzione di autocorrelazione temporale sono 0:

$$E[(\mathcal{M}_x - M_X)^2] = 0; \quad E[(\mathcal{R}_{xx}(\tau) - R_{XX}(\tau))^2] = 0, \quad \text{per ogni } \tau.$$

In tal caso   possibile concludere che, per quasi tutte le realizzazioni, la media temporale  $\mathcal{M}_x$  coincide con la media di fase  $M_X$  e la funzione di autocorrelazione temporale  $\mathcal{R}_{xx}(\tau)$  coincide con la funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(\tau)$ , per ogni  $\tau$ :

$$\mathcal{M}_x \approx M_X, \quad \mathcal{R}_{xx}(\tau) \approx R_{XX}(\tau), \quad \text{per ogni } \tau.$$

Chiameremo *ergodici* (in senso lato) tali processi.

**Definizione 9.4.** Un processo stazionario  $X(t)$    detto *ergodico* se per quasi tutte le realizzazioni (salvo cio  un insieme di realizzazioni che ha per  probabilit  nulla):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= M_X, \\ \mathcal{R}_{xx}(\tau) &= R_{XX}(\tau). \end{aligned}$$

Analogamente due processi  $X(t)$  e  $Y(t)$  sono detti congiuntamente ergodici se

$$R_{XY}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, r) Y(t + \tau, r) dt.$$

per quasi tutte le realizzazioni  $r$ .

Il fatto che un sistema sia ergodico ci permette allora di stimare la media e la funzione di autocorrelazione attraverso la media e la funzione di autocorrelazione temporale, che possono essere stimate sulla base di una singola realizzazione del processo; questo   di grande importanza pratica, poich  spesso nei sistemi reali si pu  accedere solo ai dati relativi a una singola realizzazione.

Per quanto riguarda le applicazioni, occorre dire che i concetti prima introdotti (stazionariet  ed ergodicit ) risultano spesso utili anche in presenza di processi non stazionari (esempio: segnali del parlato o rumore impulsivo). Molti processi infatti risultano *quasi stazionari*, nel senso che possono essere considerati stazionari nel medio periodo; altri processi possono essere decomposti in processi che, per un certo intervallo di tempo, sono approssimativamente stazionari. Se inoltre l'ampiezza di questo intervallo   tale che le medie temporali delle varie realizzazioni sono concentrate, allora possiamo estrarre le informazioni di interesse dalla conoscenza di una singola realizzazione.

**Esempio 9.3.1.**

Riprendendo l'esempio 9.2.2 sulla stima di ritardo temporale, supponiamo che i processi  $X(t)$ ,  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$  siano scorrelati tra loro, a tempo discreto, stazionari ed ergodici. Supponiamo inoltre che siano osservate dall'esperimento la realizzazione  $x(t, r) = (x(0), \dots, x(N-1))$  ai tempi  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  e le realizzazioni rilevate dai due sensori,  $y_1(t, r) = (y_1(0), \dots, y_1(N-1))$  e  $y_2(t, r) = (y_2(0), \dots, y_2(N-1))$ , ai medesimi tempi.

Una stima  $d$  del ritardo temporale  $D$  può essere ottenuta dal seguente algoritmo che tratteggiamo:

1. Calcola la stima  $\mathcal{R}_{y_1 y_2}(n)$  della funzione di cross-correlazione  $R_{Y_1 Y_2}(n)$ :

$$\mathcal{R}_{y_1 y_2}(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n-1} y_1(k) y_2(k+n), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

2. Calcola il ritardo massimizzando la suddetta stima  $\mathcal{R}_{y_1 y_2}(n)$ :

$$d = \arg \max_n \mathcal{R}_{y_1 y_2}(n).$$

**Esempio 9.3.2.**

Stima della funzione di autocorrelazione e di cross-correlazione.

In caso di processi ergodici  $X(t)$  e  $Y(t)$ , i due seguenti sistemi possono essere usati per ottenere una stima approssimata della funzione di autocorrelazione  $R_{XX}$  e di cross-correlazione  $R_{XY}$ , sulla base di due realizzazioni  $x(t)$  e  $y(t)$ :

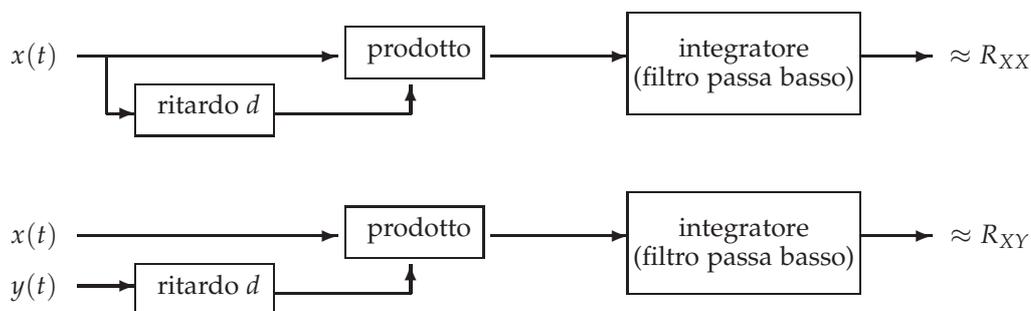


Figura 9.6 Stima dell'autocorrelazione e della cross-correlazione.

## 9.4 Caratteristiche Spettrali dei Processi Stocastici

Concentriamo qui la nostra attenzione all'analisi in frequenza dei processi stocastici stazionari. Dato un processo stazionario  $X(t)$ , come visto in precedenza, un importante parametro è la funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(t)$ : se si vuole analizzare in frequenza la funzione di autocorrelazione è naturale introdurre la nozione di *spettro di potenza*:

**Definizione 9.5.** Lo spettro di potenza  $S_{XX}(\omega)$  di un processo  $X(t)$  è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(t)$ . Lo spettro di potenza e la funzione di autocorrelazione verificano dunque la relazione trasformata-antitrasformata:

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t)e^{-i\omega t} dt, \quad R_{XX}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Il termine spettro di potenza deriva dal fatto che, indicando con  $P_X$  la potenza (= energia per unità di tempo) spesa dal processo  $X(t)$ , mediata su tutte le possibili realizzazioni,  $S_{XX}(\omega)d\omega$  risulta essere il contributo delle componenti di frequenza compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  alla potenza complessiva  $P_X$ .

Il resto di questa sezione è dedicato alla giustificazione della precedente osservazione e può essere saltato in prima lettura.

Per un segnale deterministico  $f(t)$  l'energia spesa nell'intervallo di tempo tra  $t$  e  $t + dt$  è  $f^2(t)dt$ , e quindi l'energia  $E_T$  e la potenza media  $P_T$ , relative all'intervallo di tempo  $[-T, T]$ , risultano rispettivamente:

$$E_T = \int_{-T}^T f^2(t)dt, \quad P_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt.$$

Fissato ora un processo stocastico stazionario  $X(t)$  e un tempo  $T$ , consideriamo il processo  $X_T(t)$  coincidente con  $X(t)$  nell'intervallo  $[-T, T]$  e nullo fuori da tale intervallo. Nell'intervallo  $[-T, T]$ , la potenza di una realizzazione  $r$  del processo risulta allora:

$$P_T(r) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_T^2(t, r) dt.$$

$P_T(r)$  è una variabile aleatoria, la cui aspettazione  $\mathcal{P}_T = E[P_T(r)]$  può essere interpretata come potenza media relativa all'intervallo di tempo  $[-T, T]$ . La *potenza media*  $\mathcal{P}_X$  del processo  $X(t)$  può allora essere definita come limite di  $P_T$  per  $T$  tendente a  $+\infty$ :

$$\mathcal{P}_X = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X_T^2(t, r)] dt.$$

Per processi stazionari per cui  $E[X^2(t)] < \infty$ , ricordiamo che  $E[X^2(t)] = R_{XX}(0)$ , dove  $R_{XX}$  è la funzione di autocorrelazione; poiché per grandi valori di  $T$  vale che  $E[X_T^2(t)] \approx E[X^2(t)] = R_{XX}(0)$ , si può concludere che la potenza  $\mathcal{P}_X$  media è  $R_{XX}(0)$ .

Tornando ora al processo "troncato"  $X_T(t, r)$ , la sua trasformata di Fourier  $F_T(\omega, r)$  può essere vista come un nuovo processo stocastico (sui complessi); considerando la relazione trasformata-antitrasformata, si ha:

$$F_T(\omega, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t, r)e^{-i\omega t} dt, \\ X_T(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_T(\omega, r)e^{i\omega t} d\omega.$$

A causa del teorema di Parseval vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_T^2(t, r) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_T(\omega, r)|^2 d\omega.$$

Questo fatto permette di ottenere un'espressione alternativa per la potenza media  $\mathcal{P}_X$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E [X_T^2(t, r)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[ \int_{-T}^T X_T^2(t, r) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega, r)|^2 d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [|F_T(\omega, r)|^2] d\omega.\end{aligned}$$

Se denotiamo con  $S_{XX}(\omega)$  il termine contenuto nel precedente integrale, cioè:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [|F_T(\omega, r)|^2]$$

possiamo concludere che:

$$\mathcal{P}_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T S_{XX}(\omega) d\omega.$$

Dalla formula precedente, si vede che  $S_{XX}(\omega)d\omega$  è il contributo alla potenza complessiva  $\mathcal{P}_X$  delle componenti armoniche di frequenza compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$ : per questo motivo la funzione  $S_{XX}(\omega)$  è detta *densità di potenza* o *spettro di potenza* del processo  $X(t)$ .

Mostriamo ora che questa definizione di spettro di potenza è consistente con quella data da noi precedentemente, e cioè di trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione:

**Fatto 9.1.** *Lo spettro di potenza  $S_{XX}(\omega)$  è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(t)$ .*

*Dimostrazione.* Indicando con  $\bar{F}$  il coniugato di  $F$ , per definizione si ha:

$$\begin{aligned}|F_T(r, \omega)|^2 &= F_T(r, \omega) \bar{F}_T(r, \omega) \\ &= \int_{-T}^T X_T(r, p) e^{-i\omega p} dp \int_{-T}^T X_T(r, q) e^{i\omega q} dq \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T X_T(r, p) X_T(r, q) e^{-i\omega(p-q)} dp dq.\end{aligned}$$

Si opera il cambio di variabili  $t = p - q$ ,  $a = q$ ; controllando con accuratezza le regioni di integrazione si ottiene:

$$\begin{aligned}E [|F_T(r, \omega)|^2] &= E \left[ \int_{-T}^T \int_{-T}^T X_T(r, p) X_T(r, q) e^{-i\omega(p-q)} dp dq \right] \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T E [X_T(r, p) X_T(r, q)] e^{-i\omega(p-q)} dp dq \\ &= \int_{-2T}^0 R_{XX}(t) e^{-i\omega t} \left( \int_{-T+t}^T da \right) dt + \int_0^{2T} R_{XX}(t) e^{-i\omega t} \left( \int_{-T}^{T-t} da \right) dt \\ &= 2T \int_{-2T}^{2T} R_{XX}(t) e^{-i\omega t} dt - \int_{-2T}^{2T} t R_{XX}(t) e^{-i\omega t} dt.\end{aligned}$$

Sotto l'assunzione largamente verificata nelle applicazioni che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t R_{XX}(t) dt < +\infty,$$

si arriva a concludere:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} E [ |F_T(r, \omega)|^2 ] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

□

Alcune proprietà dello spettro di potenza sono riportate di seguito (senza dimostrazione):

1.  $S_{XX}(\omega) \geq 0$  (funzione non negativa);
2.  $S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$  (simmetria);
3.  $S_{XX} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (funzione reale);
4.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = E [ X^2(t) ]$  (potenza media).

Analogamente allo spettro di potenza per un singolo processo si definisce *spettro di potenza incrociato* tra due processi  $X(t)$  e  $Y(t)$  come la trasformata di Fourier della funzione di cross-correlazione, come mostra la seguente coppia trasformata-antitrasformata:

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t) e^{-i\omega t} dt, \quad R_{XY}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Naturalmente, questo risultato è valido sotto l'ipotesi di processi congiuntamente stazionari in senso lato.

A differenza del caso di singolo processo, lo spettro di potenza di processi congiunti possiede le proprietà riportate di seguito (anc'esse senza dimostrazione):

1.  $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = \overline{S_{YX}(\omega)}$  (prop. del coniugato);
2.  $\text{Re} \{ S_{XY} \}$  è una funzione pari;
3.  $\text{Im} \{ S_{XY} \}$  è una funzione dispari;
4.  $S_{XY}(\omega) = 2\pi M_X M_Y$  (processi scorrelati).

È bene ricordare che, siccome la funzione di cross-correlazione  $R_{XY}(t)$  non è necessariamente simmetrica, lo spettro di potenza incrociato non è sempre una funzione reale, e le proprietà 2 e 3 derivano da questo fatto.

#### Esempio 9.4.1.

Calcolare lo spettro di potenza di un processo avente funzione di autocorrelazione

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

La sua trasformata di Fourier risulta:

$$\begin{aligned} S_{XX}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= \frac{A^2}{4} \left[ e^{-i(\omega - \omega_0)} + e^{-i(\omega + \omega_0)} \right] \\ &= \frac{A^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \end{aligned}$$

**Esempio 9.4.2.**

Si calcoli la funzione di autocorrelazione del processo con spettro di potenza dato da:

$$S_{XX}(\omega) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{T}\right).$$

Dalle tabelle recanti le coppie trasformata-antitrasformata di Fourier sappiamo che

$$\text{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T \text{sinc}(\omega T/2).$$

Visto che la funzione  $S_{XX}$  è il prodotto di due funzioni sinc, applicando la proprietà prodotto nelle frequenze convoluzione nel tempo si ottiene:

$$\mathcal{R}_{xx}(\tau) = T(1 - |T\tau|) \text{rect}\left(\frac{T\tau}{2}\right).$$

# RISPOSTA DI SISTEMI A SEGNALI CASUALI E MODELLI DI RUMORE

Questo capitolo è dedicato allo studio della risposta di sistemi lineari tempo-invariante a segnali casuali e all'analisi di modelli di rumore.

Nel primo paragrafo si studia la risposta di sistemi LTI a processi stazionari; la funzione di autocorrelazione e lo spettro di potenza del segnale di uscita sono espressi in termini di caratteristiche del sistema (risposta all'impulso, funzione di trasferimento) e autocorrelazione e spettro di potenza del segnale d'ingresso. Questi concetti vengono applicati a modelli di rumore stazionario (rumore bianco e colorato), alla modellazione della distorsione in un canale di comunicazione e alla modulazione d'ampiezza di segnali casuali.

Viene presentato nel secondo paragrafo un esempio di rumore non stazionario: il rumore impulsivo. Viene in particolare analizzato il caso di rumore impulsivo additivo, derivando le caratteristiche del rapporto segnale-rumore. Viene infine discusso un filtro non lineare, il filtro mediano, per l'attenuazione di rumore impulsivo.

## 10.1 Risposta di Sistemi a Segnali Casuali

Abbiamo visto come un segnale casuale possa essere modellato con un processo stocastico  $X(t)$ . Fissata ora un realizzazione  $r$  del processo,  $X(t, r)$  può essere visto come un segnale deterministico: indicando con  $Y(t, r)$  la risposta del sistema  $\mathcal{S}$  alla realizzazione  $r$  del

processo, possiamo concludere che il sistema  $S$  trasforma il processo  $X(t, r)$  nel processo  $Y(t, r)$ .

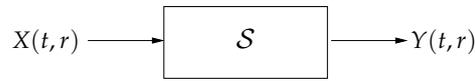


Figura 10.1 Relazione ingresso-uscita del sistema  $S$ .

Se il sistema  $S$  è lineare e tempo-invariante ed  $h$  è la risposta di  $S$  alla funzione impulsiva, possiamo in particolare affermare che:

$$Y(t, r) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u, r)h(t - u)du.$$

Spesso di un processo  $X(t)$  siamo in grado di conoscere solo alcune sue statistiche (media  $M_X$ , funzione di autocorrelazione  $R_{XX}$ , spettro di potenza  $S_{XX}$ ). Risulta allora interessante risolvere il seguente problema: dato un sistema  $S$  e il processo di ingresso  $X(t)$ , cercare di esprimere (se possibile) una statistica sulla risposta  $Y(t)$  in funzione della stessa statistica su  $X(t)$ .

Nel caso della media, questo è possibile; si ha infatti:

**Fatto 10.1.** *Se  $S$  è lineare e tempo invariante, allora:*

$$M_Y = M_X * h,$$

*cioè la media di fase del processo di uscita è la convoluzione della media di fase del processo di ingresso con la risposta  $h$  del sistema alla funzione impulsiva.*

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} M_Y &= E[Y(t, r)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(u, r)h(t - u)du\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(u, r)]h(t - u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} M_X(u)h(t - u)du. \end{aligned}$$

□

Per processi stazionari, la funzione di autocorrelazione  $R_{YY}$  del processo di uscita è esprimibile in termini della funzione di autocorrelazione  $R_{XX}$  del processo di ingresso, come dato in:

**Fatto 10.2.** *Se  $S$  è lineare e tempo invariante e  $X(t)$  è stazionario, allora la risposta  $Y(t)$  è un processo stazionario e le funzioni di autocorrelazione di  $X(t)$  e  $Y(t)$  sono legate da:*

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau - s + u)h(s)h(u)duds.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
R_{YY}(\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-u,r)h(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-s,r)h(s) ds\right] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-s,r)X(t-u,r)h(u)h(s) du ds\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t+\tau-s,r)X(t-u,r)]h(u)h(s) du ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau-s+u)h(u)h(s) du ds.
\end{aligned}$$

□

Poiché in base al risultato precedente la funzione di autocorrelazione dell'uscita  $Y(t)$  è funzione della funzione di autocorrelazione dell'ingresso  $X(t)$ , lo spettro di potenza di  $Y(t)$  sarà funzione dello spettro di potenza di  $X(t)$ . In questo caso la dipendenza assume una forma particolarmente semplice:

**Fatto 10.3.** Se  $S$  è lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento  $H(\omega)$  e  $X(t)$  è stazionario, allora la risposta  $Y(t)$  è un processo stazionario e gli spettri di potenza di  $X(t)$  e di  $Y(t)$  sono legati da:

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega).$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
S_{YY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YY}(t)e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t-s+u)e^{-i\omega t} h(u)h(s) du ds dt.
\end{aligned}$$

Ponendo  $z = t - s + u$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
S_{YY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)e^{i\omega s} ds \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-i\omega u} du \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(z)e^{-i\omega z} dz \\
&= \overline{H}(\omega)H(\omega)S_{XX}(\omega) \\
&= |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega).
\end{aligned}$$

□

Dati due processi congiuntamente stazionari  $X(t)$  e  $Y(t)$ , dove  $Y(t)$  è la risposta di un sistema  $S$  LTI avente  $X(t)$  come ingresso, la funzione di crosscorrelazione  $R_{XY}(\tau)$  è

$$\begin{aligned}
R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\
&= E\left[X(t) \int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-s)h(s) ds\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau-s)h(s) ds.
\end{aligned}$$

Lo spettro di potenza incrociato  $S_{XY}(\omega)$  di un processo  $X(t)$  e della risposta  $Y(t)$  del sistema  $S$  sollecitato dal processo  $X(t)$  è dato dal seguente risultato:

**Fatto 10.4.** Se  $S$  è lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento  $H(\omega)$  e  $X(t)$  è stazionario, allora la risposta  $Y(t)$  è un processo stazionario e lo spettro di potenza incrociato  $S_{XY}(\omega)$  è dato da:

$$S_{XY}(\omega) = H(\omega)S_{XX}(\omega).$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t-s)e^{-i\omega t} h(s) ds dt. \end{aligned}$$

Ponendo  $z = t - s$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)e^{-i\omega s} ds \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(z)e^{-i\omega z} dz \\ &= H(\omega)S_{XX}(\omega). \end{aligned}$$

□

#### Esempio 10.1.1.

**Rumore bianco e rumore colorato.** Si definisce *rumore bianco* un processo stocastico  $N(t)$  che ha spettro di potenza costante a tutte le frequenze per cui, quindi, vale:

$$S_{NN}(\omega) = N_0/2.$$

Il rumore bianco additivo modella bene il rumore termico, derivato dalle fluttuazioni delle molecole nell'aria e dagli elettroni nei resistori, fino a frequenze dell'ordine di  $10^{13}$  Hz. In questo caso  $N_0 = kT$ , dove  $T$  è la temperatura assoluta.

Un rumore caratterizzato da uno spettro di potenza a banda limitata o comunque non costante viene detto *colorato*, in analogia al fatto che la luce colorata possiede solo una banda di frequenze nel visibile. Ad esempio, la risposta di un sistema con funzione di trasferimento  $H(\omega)$  a un rumore bianco a temperatura ambiente ( $290^\circ\text{K}$ ) è un rumore colorato con spettro di potenza  $290^\circ\text{K} \cdot |H(\omega)|^2$ .

#### Esempio 10.1.2.

**Determinazione della risposta alla funzione impulsiva.** Dato un sistema lineare tempo-invariante  $S$  per cui  $h(t)$  è la risposta all'impulso  $\delta(t)$ , il seguente sistema permette di stimare  $h(t)$ :

Essendo  $S_{NN}(\omega) = N_0/2$ , indicando con  $H(\omega)$  la funzione di trasferimento di  $S$ , lo spettro di potenza incrociato tra  $X$  e la risposta  $Y$  del sistema  $S$  è, da fatto 10.4:

$$S_{NY}(\omega) = H(\omega)\frac{N_0}{2}.$$

La antitrasformata di Fourier dello spettro di potenza incrociato  $S_{NY}(\omega)$  è la funzione di cross-correlazione  $R_{NY}(t)$ , così come la antitrasformata di Fourier della funzione di trasferimento  $H(\omega)$  è la risposta all'impulso  $h(t)$ ; si ottiene allora:

$$R_{NY}(t) = h(t)\frac{N_0}{2}.$$

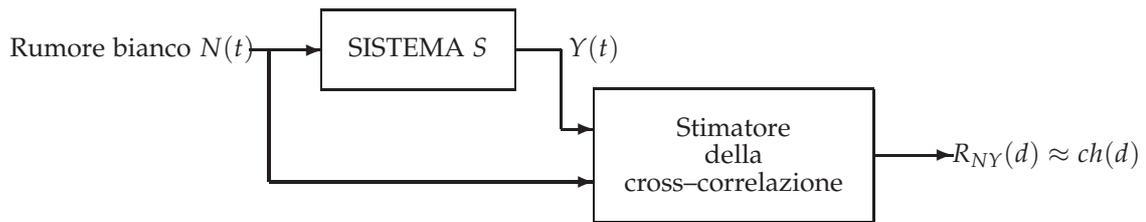


Figura 10.2 Stima della risposta all'impulso.

### Esempio 10.1.3.

**Modello di distorsione in un canale di comunicazione.** La distorsione in un canale di comunicazione può essere modellata da una combinazione di un filtro lineare e una sorgente di rumore additivo, così come illustrato nel seguente: Se  $N(t)$  e  $X(t)$  sono

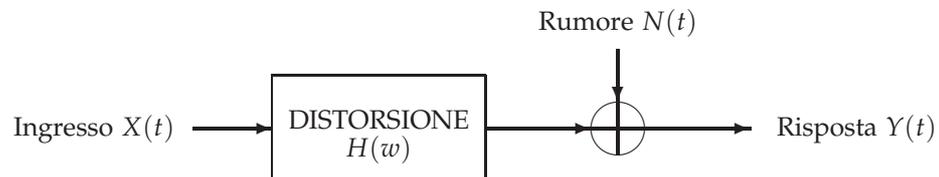


Figura 10.3 Modello di canale di comunicazione.

stazionari e scorrelati e  $N(t)$  ha media 0, allora:

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega).$$

### Esempio 10.1.4.

**Modulazione di ampiezza.** La modulazione di ampiezza, o AM, è stata introdotta nella Sezione 2.7.1. Se  $X(t)$  è un processo stocastico a tempo continuo e stazionario in senso lato, a media nulla e funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(t)$ , allora il processo in uscita

$$Y(t) = A \cos \omega_0 t X(t)$$

è chiamato modulazione in ampiezza con portante sinusoidale. Poiché il sistema non è tempo-invariante, il processo  $Y(t)$  non è in generale stazionario. Nonostante ciò, è ugualmente possibile determinare una dipendenza funzionale tra lo spettro di potenza di  $Y(t)$  e quello di  $X(t)$ :

$$S_{YY}(\omega) = \frac{A^2}{4} (S_{XX}(\omega - \omega_0) + S_{XX}(\omega + \omega_0)).$$

## 10.2 Rumore Impulsivo

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come alcuni processi stocastici stazionari possano modellare certi disturbi di trasmissione (rumore bianco e colorato). Vogliamo invece qui introdurre un modello di rumore non stazionario, detto *rumore impulsivo*, che modella disturbi di alta intensità ma di durata relativamente breve causati, ad esempio, dall'accensione di dispositivi o da click di computer.

Un rumore impulsivo può essere modellato attraverso un processo stocastico a tempo discreto  $I(t)$  espresso da:

$$I(t) = N(t)b(t),$$

dove  $N(t)$  è un processo stocastico stazionario e  $b(t)$  una sequenza di 0 e 1; ovviamente il rumore può essere attivo al tempo  $t$  soltanto se  $b(t) = 1$ .

La sequenza  $b(t)$  può essere ottenuta da una realizzazione di una catena di Markov a due stati (stato inattivo 0 e stato attivo 1), caratterizzata dalla seguente matrice stocastica  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1 - \beta & \beta \\ 1 - \alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

Questo significa che, la probabilità che la catena si trovi in un dato stato al tempo  $t + 1$  dipende solo dallo stato in cui si trova al tempo  $t$ . Detto  $b(t)$  lo stato della catena al tempo  $t$ , valgono:

$$\Pr [b(t+1) = 0 \mid b(t) = 0] = 1 - \beta$$

$$\Pr [b(t+1) = 1 \mid b(t) = 0] = \beta$$

$$\Pr [b(t+1) = 1 \mid b(t) = 1] = \alpha$$

$$\Pr [b(t+1) = 0 \mid b(t) = 1] = 1 - \alpha$$

Un importante parametro della sequenza  $b(t)$  è la frequenza  $f$  dello stato attivo 1, cioè la media temporale di  $b(t)$ :

$$f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=1}^T b(t)}{T}.$$

Allo scopo di stimare  $f$ , denotiamo con  $p_k(t)$  la probabilità che al tempo  $t$  il processo sia nello stato  $k$  ( $k = 0, 1$ ); ponendo ora  $\pi(t) = [p_0(t), p_1(t)]$ , si verifica facilmente per induzione che:

$$\pi(t) = \pi(0)P^t.$$

Se  $0 < \alpha < 1$  e  $0 < \beta < 1$ , il processo indotto dalla catena di Markov è ergodico e la distribuzione limite stazionaria  $[p_0, p_1] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \pi(t)$  può essere calcolata da:

$$[p_0, p_1] = [p_0, p_1]P.$$

Questo implica in particolare che  $p_1 = p_0\beta + p_1\alpha$ ; ricordando che  $p_0 + p_1 = 1$  si conclude che  $p_1 = \frac{\beta}{(1+\beta-\alpha)}$ .

Vale quindi il seguente:

**Fatto 10.5.** Per quasi tutte le realizzazioni, la percentuale di tempo  $f$  in cui il processo  $b(t)$  si trova nello stato attivo (cioè 1) è  $\frac{\beta}{(1+\beta-\alpha)}$ .

In generale un rumore impulsivo  $I(t)$  è un processo stocastico non stazionario. La non stazionarietà di tale processo può essere mostrata provando che la funzione di autocorrelazione  $E[I(t)I(t+\tau)]$  viene a dipendere esplicitamente da  $t$ .

Supponiamo, per semplicità, che  $N(t)$  sia un rumore bianco scorrelato, cioè che  $E[N(t)] = 0$  e con funzione di autocorrelazione  $E[N(t)N(t+\tau)] = \sigma^2\delta(\tau)$ , dove  $\sigma^2$  è la varianza di  $N(t)$ . Sotto questa ipotesi vale:

$$\begin{aligned} E[I(t)I(t+\tau)] &= E[N(t)b(t)N(t+\tau)b(t+\tau)] \\ &= E[N(t)N(t+\tau)]E[b(t)b(t+\tau)] \\ &= \sigma^2\delta(\tau)b(t), \end{aligned}$$

dove  $\delta(\tau)$  è 0 per  $\tau \neq 0$ , altrimenti è 1. Il fatto che la funzione di autocorrelazione dipenda esplicitamente da  $t$  dimostra la natura non stazionaria del rumore impulsivo.

Lo spettro di potenza  $S_{\Pi}(\omega, t)$  si ottiene come trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione, e vale quindi:

$$S_{\Pi}(\omega, t) = \sigma^2 b(t).$$

### 10.2.1 Rumore Impulsivo Additivo

Un segnale  $X(t)$ , contaminato da rumore impulsivo additivo  $I(t) = N(t)b(t)$ , viene trasformato nel processo  $Y(t) = X(t) + I(t)$ . Indicando con  $P_N$  e con  $P_X(t)$  rispettivamente la potenza del rumore  $N(t)$  e del segnale  $X(t)$  al tempo  $t$ , il rapporto segnale-rumore istantaneo SINR( $t$ ) (Signal to Impulsive Noise Ratio) può essere definito da:

$$\text{SINR}(t) = \frac{P_X(t)}{b(t)P_N}.$$

Analogamente il rapporto segnale-rumore SINR può essere definito come il rapporto tra la potenza media  $P_X$  del segnale relativa ad un intervallo di tempo sufficientemente grande e la potenza media  $P_I$  del rumore relativa ad un intervallo di tempo sufficientemente grande. Considerando l'intervallo di tempo infinito:

$$\text{SINR} = \frac{(\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum P_X(t))/T}{(\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum P_N b(t))/T}.$$

Vale:

$$P_I = \frac{\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum P_N b(t)}{T} = P_N \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=1}^T b(t)}{T} = P_N f = P_N \frac{\beta}{(1 + \beta - \alpha)}.$$

Possiamo pertanto concludere:

$$\text{SINR} = \frac{P_X}{P_N} \frac{(1 + \beta - \alpha)}{\beta}.$$

Spesso sono presi in considerazione modelli in cui  $\beta = \alpha$ . In tal caso  $f = \alpha$  e:

$$\text{SINR} = \frac{P_X}{\alpha P_N}.$$

### 10.2.2 Eliminazione di Rumore Impulsivo Additivo

In questo paragrafo discutiamo una tecnica per attenuare un rumore impulsivo additivo, basata su un filtro non lineare, detto *filtro mediano*.

Dato un vettore  $x = [x_1, \dots, x_n]$  di dimensione  $n = 2k + 1$ , la mediana  $\text{med}(x)$  di  $x$  è un elemento  $x_s$  di  $x$  tale che almeno  $k$  elementi di  $x$  sono minori o uguali a  $x_s$  e almeno  $k$  elementi di  $x$  sono maggiori o uguali a  $x_s$ . In altre parole, la mediana di un vettore è quell'elemento che, dopo aver ordinato il vettore, si trova in posizione centrale.

Il filtro mediano MED di finestra di lunghezza  $k$  è un sistema che trasforma un segnale  $f(t)$  in un segnale  $g(t) = \text{MED}(f(t))$  tale che:

$$g(t) = \text{med}(f(t-k), \dots, f(t), \dots, f(t+k)).$$

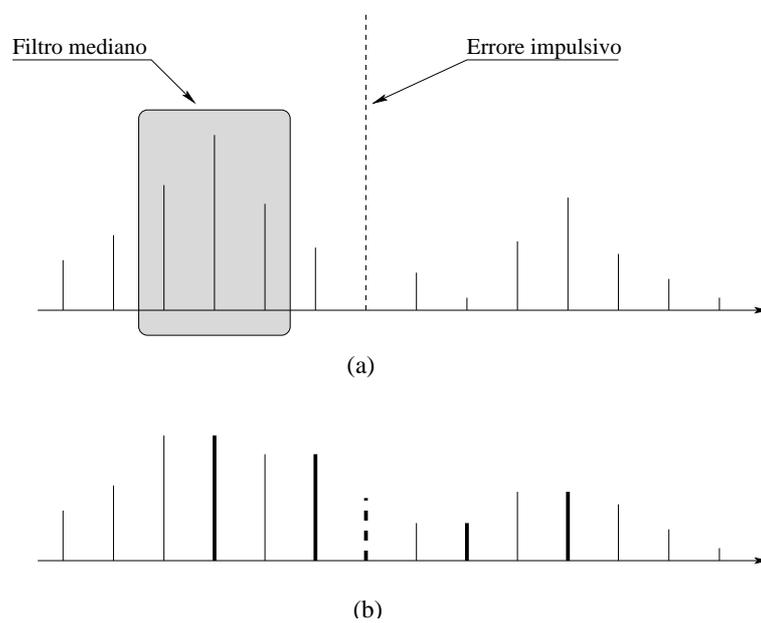
Contrariamente alla media, il filtro mediano è un operatore chiaramente non lineare, poiché in generale  $\text{MED}(x(t) + y(t)) \neq \text{MED}(x(t)) + \text{MED}(y(t))$ . Tale sistema non è inoltre causale, in quanto la risposta al tempo  $t$  può dipendere da valori dell'ingresso a tempi  $t' > t$ . Questo operatore possiede tuttavia la proprietà, molto utile in questo contesto, di non essere sensibile a valori inusualmente grandi: ampliando arbitrariamente una componente maggiore della mediana, la mediana non cambia.

Un'importante proprietà del filtro mediano è quella di preservare molte discontinuità del segnale: questo è particolarmente utile nell'elaborazione di immagini, dove il filtro mediano può essere usato per rimuovere rumore impulsivo sull'immagine, senza modificare i contorni. Per contro, l'applicazione di filtri mediani per l'eliminazione di rumore impulsivo a segnali audio non produce in generale ricostruzione audio di alta qualità. Questo è principalmente dovuto al fatto che il filtro mediano, pur essendo in grado di eliminare impulsi di breve durata dovuti al rumore, introduce in generale distorsioni sui campioni di segnale corretti, come mostrato in Figura 10.4.

Le distorsioni introdotte dal filtro mediano possono essere ridotte con l'impiego di una soglia adattativa, così che il campione al tempo  $t$  viene rimpiazzato dalla mediana solo se la differenza tra il campione stesso e la mediana supera la soglia:

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } |g(t) - \text{med}(f(t-k), \dots, f(t+k))| < \eta\theta(t), \\ \text{med}(f(t-k), \dots, f(t+k)) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Qui  $\eta$  è un parametro, mentre  $\theta(t)$  è una soglia adattativa che può essere calcolata attraverso una stima della media di  $|g(t) - \text{med}(f(t-k), \dots, f(t+k))|$ .



**Figura 10.4** Segnale di ingresso (a) e segnale di uscita (b) di un filtro mediano. Il filtro elimina il rumore impulsivo (campione tratteggiato in (a)), ma alcuni campioni corretti vengono distorti (campioni in neretto in (b)).



## FILTRI DI WIENER

La teoria formulata da Norbert Wiener dà i fondamenti sui filtri costruibili da dati, ottimi nel senso dei minimi quadrati. Questi filtri giocano un importante ruolo nelle applicazioni a problemi di predizione lineare, ricostruzione dei segnali, identificazione di sistema, equalizzazione di canale.

Nel primo paragrafo viene formulato e risolto il problema della costruzione del filtro per processi stocastici stazionari a tempo continuo, nel dominio delle frequenze. I risultati vengono applicati a problemi quali la riduzione di rumore additivo ed equalizzazione di canale. Si mostra poi la configurazione di un sistema per la stima dei coefficienti di Wiener nel dominio delle frequenze.

Il secondo paragrafo è dedicato alla derivazione del filtro di Wiener FIR causale per sistemi a tempo discreto; viene discussa la realizzazione di tali filtri per segnali ergodici.

Nel terzo paragrafo, infine, si discute la realizzazione di algoritmi adattativi per il filtro di Wiener e si mostra l'algoritmo LMS.

### 11.1 Formulazione nel Dominio delle Frequenze

In questo paragrafo deriviamo il filtro di Wiener, formulando il problema per sistemi stazionari a tempo continuo nel dominio delle frequenze.

Il problema può essere posto in questi termini: dati due processi stazionari  $X(t)$  e  $Y(t)$ ,

determinare il sistema lineare tempo-invariante  $S$  tale che la risposta  $Z(t) = S(Y(t))$  sia più "vicina possibile" a  $X(t)$  (vedi Figura 11.1).



Figura 11.1

Allo scopo di riformulare il problema nel dominio delle frequenze, si considerano le trasformate di Fourier  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$ , rispettivamente dei processi stocastici  $X(t)$  e  $Y(t)$ ; indichiamo inoltre con  $W(\omega)$  la funzione di trasferimento (incognita) del sistema  $S$  e con  $D(\omega)$  la risposta in frequenza del sistema su ingresso  $G(\omega)$ , così che:

$$D(\omega) = W(\omega)G(\omega).$$

Fissata una particolare realizzazione del processo  $Y(t)$ , l'errore  $e(\omega)$  tra la risposta  $D(\omega)$  e il risultato desiderato  $F(\omega)$ , a una data frequenza  $\omega$ , è:

$$e(\omega) = D(\omega) - F(\omega).$$

Una ragionevole nozione di distanza tra i due processi  $D(\omega)$  e  $F(\omega)$  è l'aspettazione del quadrato del modulo dell'errore, a una data frequenza  $\omega$ :

$$\text{dist}[D(\omega), F(\omega)] = E[e(\omega)e^*(\omega)].$$

Il problema può allora essere riformulato come il seguente problema di ottimizzazione: *dati  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$ , per ogni fissato  $\omega$  determinare  $W(\omega)$  che minimizza  $\text{dist}[G(\omega)W(\omega), F(\omega)]$ .*

Ricordiamo che la condizione necessaria di minimo è:

$$\frac{\partial}{\partial W(\omega)} \text{dist}[G(\omega)W(\omega), F(\omega)] = 0, \quad (11.1)$$

dove  $\frac{\partial}{\partial W(\omega)}$  è l'operazione di derivata complessa, essendo  $W(\omega)$  in generale a valori complessi. Si può calcolare (vedi sotto) che:

$$\frac{\partial}{\partial W(\omega)} \text{dist}[G(\omega)W(\omega), F(\omega)] = 2(W(\omega)S_{YY}(\omega) - S_{XY}(\omega)), \quad (11.2)$$

dove  $S_{YY}(\omega) = E[G(\omega)G^*(\omega)]$  è lo spettro di potenza di  $Y(t)$  e  $S_{XY}(\omega) = E[F(\omega)G^*(\omega)]$  è lo spettro di potenza incrociato di  $X(t)$  e  $Y(t)$ .

Il filtro di Wiener  $W(\omega)$  che minimizza la funzione  $\text{dist}[G(\omega)W(\omega), F(\omega)]$  verifica allora:

$$W(\omega)S_{YY}(\omega) - S_{XY}(\omega) = 0.$$

Possiamo quindi concludere:

**Fatto 11.1.** *Il filtro di Wiener, che minimizza la distanza nel senso del quadrato dell'errore tra la risposta a un processo  $Y(t)$  e un processo  $X(t)$ , ha la funzione di trasferimento  $W(\omega)$ :*

$$W(\omega) = \frac{S_{XY}(\omega)}{S_{YY}(\omega)}.$$

dove  $S_{YY}(\omega)$  è lo spettro di potenza di  $Y(t)$  e  $S_{XY}(\omega)$  lo spettro di potenza incrociato tra  $X(t)$  e  $Y(t)$ .

Allo scopo di dimostrare la (11.2), richiamiamo brevemente la nozione di derivata complessa. Se  $z = a + ib$  e  $Z(a, b) = A(a, b) + iB(a, b)$ , allora la derivata complessa di  $Z$  rispetto a  $z$  è:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial a} + i \frac{\partial Z}{\partial b}.$$

In particolare vale che:

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z^*}{\partial z} = 2, \quad \frac{\partial z z^*}{\partial z} = 2z.$$

Applicando le regole sopra descritte al termine  $\frac{\partial}{\partial W(\omega)} \text{dist}[G(\omega)W(\omega), F(\omega)]$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E [e(\omega)e^*(\omega)]}{\partial W(\omega)} &= \frac{\partial}{\partial W(\omega)} E [(G(\omega)W(\omega) - F(\omega))(G^*(\omega)W^*(\omega) - F^*(\omega))] \\ &= \frac{\partial}{\partial W(\omega)} (W(\omega)W^*(\omega)E [G(\omega)G^*(\omega)] - W(\omega)E [G(\omega)F^*(\omega)] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial W(\omega)} W^*(\omega)E [G^*(\omega)F(\omega)] \\ &= 2W(\omega)E [G(\omega)G^*(\omega)] - 2E [F(\omega)G^*(\omega)] \\ &= 2(W(\omega)S_{YY} - S_{XY}). \end{aligned}$$

### Esempio 11.1.1.

*Filtro per la riduzione di rumore additivo.* Consideriamo un processo  $Y(t)$  ottenuto contaminando un processo  $X(t)$  con rumore additivo  $N(t)$ , a media 0 e scorrelato da  $X(t)$ :

$$Y(t) = X(t) + N(t).$$

In questo caso  $S_{XY} = S_{XX}$ , mentre  $S_{YY} = S_{XX} + S_{NN}$ . Il filtro di Wiener  $W$  risulta allora:

$$W(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)}.$$

Dividendo numeratore e denominatore per lo spettro di potenza del rumore  $S_{NN}(\omega)$  e introducendo la variabile  $\text{SNR}(\omega) = S_{XX}(\omega)/S_{NN}(\omega)$ , detta *rapporto segnale rumore* si ottiene infine:

$$W(\omega) = \frac{\text{SNR}(\omega)}{1 + \text{SNR}(\omega)}.$$

Si osservi che:

- $0 \leq W(\omega) \leq 1$ ,
- se  $\text{SNR}(\omega) \approx +\infty$ , allora  $W(\omega) \approx 1$ ,
- se  $\text{SNR}(\omega) \approx 0$ , allora  $W(\omega) \approx 0$ .

In sostanza, il filtro di Wiener per rumore additivo attenua ogni componente di frequenza in relazione a una stima del rapporto segnale rumore.

Se gli spettri del segnale e del rumore sono completamente separati, allora il filtro di Wiener permette la ricostruzione perfetta del segnale (con combinazioni di filtri passa-banda), altrimenti attenua la potenza del rumore.

Nel caso limite di rumore bianco, il filtro di Wiener risulta:

$$W(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + \frac{N_0}{2}}.$$

### Esempio 11.1.2.

*Equalizzazione di canale.* La distorsione introdotta in un canale di comunicazione può essere modellata da una combinazione di un filtro lineare, di cui è nota la funzione di trasferimento, con un rumore additivo (vedi Figura 11.1.2):

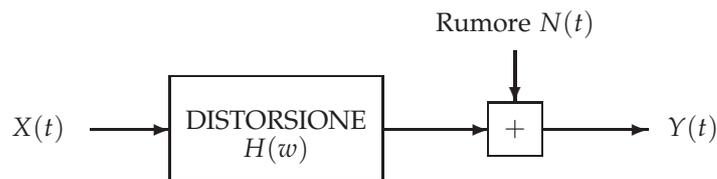


Figura 11.2 Canale di comunicazione con rumore additivo.

Per ottenere una buona ricostruzione di  $X(t)$  sulla base dell'osservazione di  $Y(t)$ , basta applicare a  $Y(t)$  il filtro di Wiener  $W(\omega)$  con:

$$W(\omega) = \frac{\text{SNR}(\omega)}{|H(\omega)|^2 + \text{SNR}(\omega)}.$$

### Esempio 11.1.3.

*Implementazione di filtri di Wiener.* La implementazione di filtri di Wiener per la riduzione di rumore additivo richiede la conoscenza dello spettro di potenza del segnale e del rumore; il principale problema è che il segnale desiderato è osservato con aggiunta di rumore, e quindi non è direttamente disponibile lo spettro di potenza del segnale. Una soluzione possibile è quella di stimare lo spettro di potenza del segnale più rumore, stimare lo spettro di potenza del rumore per periodi in cui il segnale è disattivato, ottenendo infine per sottrazione lo spettro di potenza del segnale e quindi il filtro  $W$  come mostrato in figura 11.3.

L'assunzione che il rumore sia stazionario può essere rilassata a quella che il rumore sia quasi-stazionario, cioè stazionario per periodi sufficientemente lunghi: in tal caso il filtro può essere ricalcolato periodicamente. L'assunzione di quasi-stazionarietà è ragionevole per molti tipi di rumore (ad esempio il rumore creato dal motore di un'automobile, il rumore creato dai computer in un ufficio).

## 11.2 Filtro di Wiener FIR

In questo paragrafo consideriamo segnali e sistemi a tempo discreto  $t \in \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ . Obiettivo è di derivare un algoritmo per la determinazione del filtro di Wiener  $S$  ottimo rispetto a due processi stazionari  $X(t)$  e  $Y(t)$ , sotto l'ipotesi che:

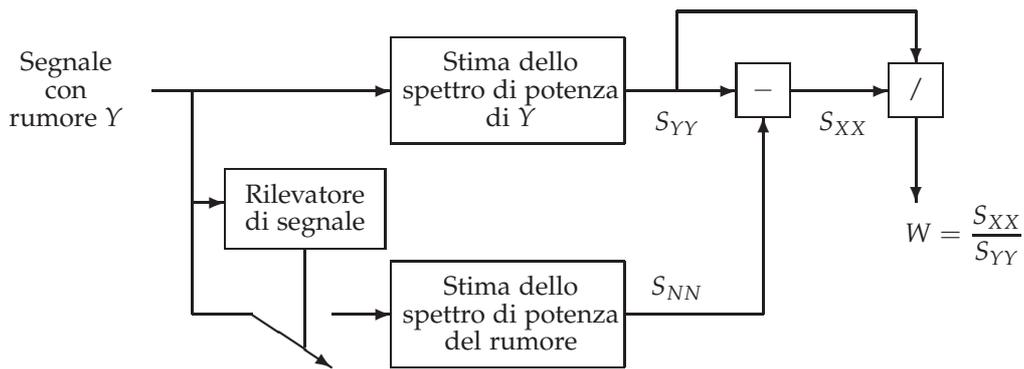


Figura 11.3 Implementazione di filtri di Wiener.

- il filtro sia causale, cioè  $w(t) = 0$  per  $t < 0$ , dove  $w(t)$  è la risposta di  $S$  all'impulso;
- la risposta  $w(t)$  di  $S$  all'impulso sia di durata finita, cioè  $w(t) = 0$  per  $t \geq q$ , per un opportuno  $q$  (filtro FIR).

Supponiamo che il sistema  $S$  abbia un risposta di durata  $q$ , con  $q$  fissato; nelle ipotesi precedenti esso sarà individuato da un vettore  $w = (w_0, \dots, w_{q-1})$  con  $w_t = w(t)$  per  $0 \leq t < q$ .

Dato un processo stazionario  $Y(t)$ , la risposta  $Z(r, t)$  del sistema alla realizzazione  $Y(r, t)$  del processo è esprimibile mediante convoluzione  $w * Y(t)$ :

$$Z(r, t) = \sum_{k=0}^{q-1} w_k Y(r, t - k).$$

Dato un altro processo stazionario  $X(t)$  che interpretiamo come segnale desiderato, l'errore  $e(t)$  tra  $X(t)$  e la risposta  $Z(t)$  del filtro  $w$  al processo  $Y(t)$  è dato da:

$$e = E [(X(t) - w * Y(t))^2].$$

Il problema di determinazione del filtro ottimo può allora essere visto come il seguente problema di ottimizzazione:

$$\text{determinare } w \text{ che minimizza l'errore } e = E [(X(t) - w * Y(t))^2].$$

Condizione necessaria di minimo è:

$$\frac{\partial e}{\partial w_k} = 0 \quad (0 \leq k < q).$$

Calcoliamo le precedenti derivate, denotando con  $R_{YY}$  e  $R_{XY}$  le funzioni di autocorrelazione di  $Y(t)$  e di cross-correlazione di  $X(t)$  e  $Y(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial w_k} &= \frac{\partial}{\partial w_k} E \left[ \left( X(t) - \sum_{j=0}^{q-1} w_j Y(t-j) \right)^2 \right] \\ &= E \left[ 2 \left( X(t) - \sum_{j=0}^{q-1} w_j Y(t-j) \right) Y(t-k) \right] \\ &= 2 \left( E[X(t)Y(t-k)] - \sum_{j=0}^{q-1} w_j E[Y(t-j)Y(t-k)] \right) \\ &= 2 \left( R_{XY}(k) - \sum_{j=0}^{q-1} w_j R_{YY}(k-j) \right) \end{aligned}$$

La determinazione del filtro di Wiener  $w$  è quindi ridotta alla soluzione del seguente sistema lineare:

$$(*) \quad R_{XY}(k) - \sum_{j=0}^{q-1} w_j R_{YY}(k-j) = 0 \quad (0 \leq k < q).$$

Le informazioni intorno a  $X(t)$  e a  $Y(t)$  necessarie per poter costruire il filtro di Wiener, che applicato a  $Y(t)$  approssima il comportamento desiderato  $X(t)$ , sono essenzialmente la funzione di autocorrelazione  $R_{YY}$  e quella di cross-correlazione  $R_{XY}$ .

Ad alto livello, l'algoritmo prevede due passi fondamentali ben distinti:

1. Stima di  $R_{YY}$  e  $R_{XY}$ .
2. Soluzione del sistema lineare (\*).

Riguardo al passo 1., se i processi sono ergodici è sufficiente stimare su una realizzazione la funzione di autocorrelazione temporale di  $Y(t)$  e di cross-correlazione temporale di  $X(t)$  e  $Y(t)$ .

Riguardo al passo 2., si osserva che la matrice relativa al sistema lineare (\*) ha una struttura altamente regolare, essendo uguali tra loro le componenti sulle diagonali da sinistra a destra (matrice di Toeplitz); la matrice è inoltre simmetrica:

$$\begin{bmatrix} R_{YY}(0) & R_{YY}(1) & \dots & R_{YY}(q-1) \\ R_{YY}(1) & R_{YY}(0) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & R_{YY}(1) \\ R_{YY}(q-1) & \dots & R_{YY}(1) & R_{YY}(0) \end{bmatrix}$$

Per risolvere sistemi lineari di questo tipo esistono metodi numerici particolarmente efficienti (esempio: decomposizione di Cholesky).

### 11.3 Algoritmi Adattativi per Filtri di Wiener: LMS

L'algoritmo che abbiamo precedentemente tratteggiato per il calcolo di un filtro di Wiener consiste di passi ben distinti:

1. acquisizione di un adeguato numero di campioni di una realizzazione dei processi  $Y(t)$  e  $X(t)$ ;
2. stima delle funzioni di autocorrelazione e cross-correlazione, che entrano come coefficienti in un sistema lineare;
3. soluzione del sistema lineare, cosa che permette di ottenere il filtro.

Questa impostazione soffre di due principali inconvenienti:

- Il tempo di esecuzione dell'algoritmo può introdurre ritardi indesiderati se si vuole fare uso del filtro in tempo reale.
- Se i processi non sono stazionari, è necessario periodicamente modificare il filtro riapplicando l'algoritmo

Un approccio alternativo consiste nel disegnare un algoritmo adattativo che cerca di stimare in modo ricorsivo i parametri  $w$  del filtro. Questo può essere ottenuto da un algoritmo iterativo che per ogni tempo  $t$  calcola una stima  $w(t)$  dei parametri del filtro come segue:

1. i parametri  $w(0)$  sono arbitrari, oppure stabiliti con una tecnica "ad hoc" esterna all'algoritmo;
2. i parametri  $w(t+1)$  sono calcolati a partire da  $w(t)$ , in modo da minimizzare l'errore, cioè la distanza tra il segnale desiderato e l'uscita del filtro con parametri  $w(t)$ .

Lo schema generale è:

$$w(t+1) = w(t) + \text{Aggiornamento(errore)}.$$

Il problema che ora si pone è di come scegliere *Aggiornamento*, data una funzione errore e  $w(t)$ , in modo che sulla  $w(t+1)$  l'errore diminuisca, almeno tendenzialmente.

Una semplice soluzione può essere ottenuta attraverso il gradiente dell'errore: sia  $f = f(w)$  una funzione errore le cui variabili sono le componenti di un vettore di parametri  $w$ . Poiché l'obiettivo è minimizzare l'errore, se  $f(w(t))$  è l'errore al tempo  $t$ , i parametri  $w(t+1)$  dovranno essere scelti in modo tale da diminuire l'errore:  $f(w(t+1)) \leq f(w(t))$ .

Se  $f$  è una funzione "sufficientemente regolare", un minimo locale di  $f$  può essere trovato iterando la regola data nel seguente:

**Fatto 11.2.** Per  $\eta > 0$  sufficientemente piccolo, sia:

$$w_k(t+1) = w_k(t) - \eta \frac{\partial f}{\partial w_k}(w(t)), \quad (0 \leq k < q-1).$$

Allora:  $f(w(t+1)) \leq f(w(t))$ .

*Dimostrazione.* Si consideri infatti lo sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$\begin{aligned} f(w(t+1)) - f(w(t)) &\approx \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\partial f}{\partial w_k}(w(t))(w_k(t+1) - w_k(t)) \\ &= -\eta \sum_{k=0}^{q-1} \left( \frac{\partial f}{\partial w_k}(w(t)) \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

□

Il metodo qui tratteggiato è una variante della tecnica di ricerca di minimi su base locale, ed è detto *metodo del gradiente*. Il parametro  $\eta$ , detto tasso di adattamento, controlla la stabilità e la velocità di convergenza: valori troppo alti di  $\eta$  rendono il metodo instabile mentre valori troppo bassi lo rendono troppo lento.

Tornando al problema di disegnare un algoritmo adattativo per costruire il filtro di Wiener, consideriamo le realizzazioni  $x(t)$  e  $y(t)$  di due processi  $X(t)$  e  $Y(t)$ . L'errore al tempo  $t$  tra il segnale desiderato  $x(t)$  e la risposta del filtro  $(w_0, w_1, \dots, w_{q-1})$  al segnale  $y(t)$  può essere definito mediante l'errore istantaneo  $e(t, w_0, \dots, w_{q-1})$ :

$$e = x(t) - \sum_{k=0}^{q-1} w_k y_{t-k}.$$

L'algoritmo LMS (Least Mean Squared) si basa sulla applicazione del metodo del gradiente in cui la funzione errore è il quadrato dell'errore istantaneo.

Poiché il gradiente di  $e^2(t)$  è dato da:

$$\frac{\partial e^2(t)}{\partial w_j} = 2e(t) \frac{\partial}{\partial w_j} \left( x(t) - \sum_{k=0}^{q-1} w_k y_{t-k} \right) = -2e(t) y_{t-j},$$

l'algoritmo LMS risulta essere:

Algoritmo LMS: ingresso  $x(t)$  e  $y(t)$

$$\text{Per } t = 0: \quad w_k(0) = a_k \quad (0 \leq k < q)$$

$$\text{Per tutti i } t: \quad \begin{cases} e(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{q-1} w_k y_{t-k} \\ w_k(t+1) = w_k(t) + \eta e(t) y_{t-k} \quad (0 \leq k < q) \end{cases}$$

I coefficienti iniziali  $a_k$  del filtro sono scelti a caso o già parzialmente adattati su base di qualche conoscenza preliminare.

Il maggior pregio dell'algoritmo LMS è la sua semplicità realizzativa ed efficienza: una semplice analisi mostra che, sia il tempo di esecuzione di ogni iterazione che lo spazio richiesto sono  $O(q)$ , dove  $q$  è la lunghezza del filtro.

La stabilità e l'adattabilità dell'algoritmo possono essere migliorate introducendo un fattore positivo  $\alpha < 1$  come segue:

$$w_k(t+1) = \alpha w_k(t) + \eta e(t) y_{t-k}, \quad (0 \leq k < q).$$

Il parametro  $\alpha$  ha l'effetto di aumentare la stabilità e accelerare l'adattamento del filtro alle variazioni del segnale di ingresso.

## RICHIAMI DI TEORIA DELLA PROBABILITÀ

Richiamiamo qui alcuni elementi di teoria della probabilità: uno studio originato da fenomeni *aleatori* la cui caratterizzazione, data l'intrinseca imprevedibilità degli esiti, può essere affrontata solo mediante leggi probabilistiche. La trattazione qui riportata non è rigorosa e neppure esaustiva, rappresenta solo un richiamo dei principali risultati in questa disciplina.

Viene introdotto il concetto di probabilità attraverso l'approccio – ritenuto più intuitivo anche se meno rigoroso – detto frequentista giacché fa leva sulla nozione di frequenza relativa. Dalla definizione di probabilità si deriva la nozione di probabilità congiunta, probabilità condizionale, oltre al teorema delle probabilità totali, la nota formula di Bayes e l'omonimo teorema. Si richiama poi la definizione di variabile aleatoria (in una o più dimensioni) e la sua caratterizzazione in termini di distribuzioni e momenti.

### Il Concetto di Probabilità

I concetti base della teoria della probabilità sono quelli di *esperimento*, *spazio campionario* ed *evento*. Un esperimento è una procedura sperimentale, caratterizzata dall'aver un ben determinato insieme di possibili risultati, il cui esito non è prevedibile a priori. Lo spazio campionario è un insieme  $\Omega$  (finito o infinito) associato ad un dato esperimento che contiene tutti i possibili esiti (o eventi elementari) dell'esperimento stesso. Un evento è un sottoinsieme  $A$  di  $\Omega$ . Una prova è una singola ripetizione dell'esperimento.

Seguendo l'approccio frequentista (meno rigoroso di quello assiomatico dovuto a Kolmogorov, ma tuttavia più vicino all'intuizione), se si eseguono  $n$  prove di un esperimento, la probabilità  $P(A)$  di un evento  $A$  è definita come il limite del rapporto tra il numero di volte  $n_A$  in cui si verifica  $A$  e il numero di prove (*frequenza relativa*):

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_A}{n}.$$

Alcune proprietà risultano più evidenti se si assume che gli eventi di un esperimento siano in numero finito  $A_1 \dots, A_N$ . In particolare, se ad ogni prova se ne verifica uno e un solo, essi sono detti *mutuamente esclusivi*. Quindi, nel caso di eventi che soddisfano questa proprietà, se  $A_i$  si verifica  $n_{A_i}$  volte ( $1 \leq i \leq N$ ) su  $n$  prove tale che  $n_{A_1} + \dots + n_{A_N} = n$ , allora

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N) = 1.$$

Dalla definizione data, è immediato derivare altre proprietà fondamentali: la probabilità dell'evento certo è uno, quella dell'evento impossibile è zero e, in generale, la probabilità di un evento  $A$  soddisfa:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Se due eventi  $A$  e  $B$  non sono mutuamente esclusivi e se su  $n$  prove si verificano contemporaneamente  $n_{AB}$  volte, allora la probabilità *congiunta*  $P(A, B)$  è definita dal limite della frequenza relativa:

$$P(A, B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_{AB}}{n}.$$

In questo caso si ha che  $n_A + n_B - n_{AB} = n$ , da cui, in analogia con quanto visto per gli eventi mutuamente esclusivi, si ricava

$$P(A) + P(B) - P(A, B) = 1$$

Particolare importanza riveste il rapporto  $n_{AB}/n_B$  che si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore in  $n_{AB}/n$  per  $n_B$  e studiandolo ancora una volta in termini di frequenze relative, cioè

$$\frac{n_{AB}}{n_B} \cdot \frac{n_B}{n}.$$

Il limite del rapporto  $n_{AB}/n_B$  viene chiamato probabilità *condizionale*, denotata da  $P(A|B)$  e letta probabilità di  $A$  "dato"  $B$ ; essa fornisce la misura di incertezza residua di  $A$  sapendo che  $B$  si è verificato. Eseguendo la stessa analisi per  $P(B|A)$ , si ricavano dunque le relazioni:

$$P(A, B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Da quest'ultima si deriva la fondamentale regola di *Bayes*:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Due proprietà che risultano estremamente importanti nelle applicazioni sono il teorema della *probabilità totale* ed il teorema di *Bayes*. Il primo asserisce che se  $A_1 + \dots + A_N$  sono eventi mutuamente esclusivi (cioè  $A_i \cap A_j = \emptyset$  per ogni  $i, j$  con  $i \neq j$ ), e  $B \subseteq \bigcup_{i=1}^N A_i$ , allora

$$P(B) = \sum_{i=1}^N P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

Il teorema di Bayes vale nelle stesse condizioni del teorema delle probabilità totali, ma ci permette di passare dalle probabilità a priori  $P(A_i)$  alle probabilità a posteriori:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^N P(B|A_j) \cdot P(A_j)}.$$

Considerati due eventi  $A$  e  $B$ , se  $P(A|B)$  non dipende dalle occorrenze di  $B$ , allora  $P(A|B) = P(A)$  e i due eventi sono detti *statisticamente indipendenti*; lo stesso si può dire per  $B$ ,  $P(B|A) = P(B)$ . Questo fatto implica

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B).$$

## Variabili Aleatorie

Una *variabile casuale* o *aleatoria* è una funzione che mappa gli elementi dello spazio dei campioni nella retta reale. Pertanto i valori assunti dalla variabile aleatoria sono numeri reali corrispondenti agli eventi elementari di un esperimento.

Con riferimento alle variabili aleatorie continue, diremo che la variabile  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  definisce l'evento  $A = \{X \leq x\}$  corrispondente all'insieme  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ . La *funzione di distribuzione cumulativa* (cdf)  $F_X(x)$  di  $X$  è definita come la probabilità che  $X$  assuma valori minori o uguali a  $x$ :

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

La cdf possiede le seguenti proprietà:

1.  $0 \leq F_X(x) \leq 1$ ;
2.  $F_X(-\infty) = 0$  e  $F_X(+\infty) = 1$ ;
3.  $F_X$  è una funzione monotona nondecreciente, ovvero  $x_1 < x_2$  implica  $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ .

Data la variabile aleatoria  $X$ , si definisce *funzione densità di probabilità* (pdf)  $f_X(x)$  la derivata della cdf:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Le principali proprietà della pdf si possono dedurre direttamente dalla cdf e sono:

1.  $f_X(x) \geq 0$ , per tutti gli  $x \in \mathbb{R}$ ;
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$ ;
3.  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ ;
4.  $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$ .

## Trasformazioni di una Variabile Aleatoria

Spesso si presenta la necessità di caratterizzare statisticamente una nuova variabile aleatoria  $Y$  a partire da una data variabile  $X$ , ottenuta mediante la trasformazione  $Y = g(X)$ . Tra le operazioni qui richiamate, figurano le principali grandezze che permettono di descrivere sinteticamente una variabile aleatoria, quali media, varianza, valore quadratico medio, appartenenti alla più ampia classe dei momenti.

La *media* o *valore atteso* di  $X$  è data da:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx,$$

e rappresenta la media pesata (dalla pdf) dei valori  $x$  assunti dalla variabile. Considerando la trasformazione  $Y = g(X)$ , si può estendere il risultato precedente come segue:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Il momento secondo di una variabile  $X$  con media  $\mu = E[X]$  è chiamato *varianza*, denotato da  $\sigma^2 = \text{Var}[X]$  e si ricava dalla trasformazione  $Y = g(X) = (X - \mu)^2$ :

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu)^2 f_X(x) dx.$$

Poiché la varianza è dimensionalmente omogenea al quadrato della variabile, spesso si preferisce utilizzare la deviazione standard  $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$  che ha le stesse dimensioni della variabile. Rammentiamo qui anche la relazione fondamentale che connette la varianza con il *valore quadratico medio*  $E[X^2]$ :

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Il *momento n-esimo*  $m_n$  e il *momento centrale n-esimo* di una variabile casuale vengono definiti a partire dalle trasformazioni  $g(X) = X^n$  e  $g(X) = (X - \mu)^n$ , calcolandone successivamente il valore atteso:

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx, \quad E[(X - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu)^n f_X(x) dx.$$

## Vettori Aleatori

Una grandezza aleatoria a valori vettoriali  $X = (X_1, \dots, X_n)$  in cui ogni singola componente  $X_i$  è una variabile aleatoria è detto *vettore aleatorio*. Con riferimento al caso bidimensionale, detti  $A$  e  $B$  due eventi definiti sullo stesso spazio campionario e rappresentati dagli insiemi  $\{X \leq x\}$  e  $\{Y \leq y\}$ , l'evento congiunto è dato dall'insieme  $\{X \leq x, Y \leq y\}$ . La probabilità congiunta del vettore  $(X, Y)$  è espressa in modo analogo al caso monodimensionale mediante la funzione di distribuzione cumulativa (cdf):

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Valgono le seguenti proprietà:

1.  $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$  per ogni  $x$  e  $y$ ;
2.  $F_{XY}(x, -\infty) = 0$ ,  $F_{XY}(-\infty, y) = 0$  e  $F_{XY}(-\infty, -\infty) = 0$ ;

$$3. F_{XY}(\infty, \infty) = 1$$

La pdf congiunta è espressa come:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y},$$

e gode delle proprietà:

$$1. f_{XY}(x, y) \geq 0, \text{ per tutti gli } x, y \in \mathbb{R};$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1;$$

$$3. F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u, v) du dv;$$

$$4. P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_1) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x, y) dx dy.$$

Le densità *marginali*, quando esistono, si ricavano integrando la pdf congiunta su tutto l'asse reale rispetto ad una sola variabile:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx.$$

L'indipendenza statistica di due o più variabili aleatorie implica che la cdf e la pdf siano fattorizzabili. Nel caso bidimensionale si ha:

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{e} \quad f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Riguardo ai momenti, i risultati del caso monodimensionale viste sopra si estendono a quello multidimensionale. In particolare, se  $(X, Y)$  è un vettore aleatorio con pdf congiunta  $f_{XY}(x, y)$ , l'aspettazione della trasformazione  $g(X, Y)$  è data da:

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy.$$

Se poniamo  $g(X, Y) = X^n Y^k$ , il momento generalizzato  $m_{nk}$  è definito come:

$$m_{nk} = E[X^n Y^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^k f_{XY}(x, y) dx dy,$$

e la somma  $n + k$  è l'ordine del momento. Il momento del secondo ordine  $m_{11} = E[XY]$  è chiamato *correlazione*; se la correlazione è fattorizzabile, cioè se si può scrivere

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y],$$

allora le variabili  $X$  e  $Y$  sono dette *scorrelate*. Se due variabili sono indipendenti (pdf congiunta fattorizzabile) allora anche l'aspettazione è fattorizzabile; il contrario, cioè l'aspettazione fattorizzabile implica che le variabili sono indipendenti, non è in generale vero.

Il momento centrale generalizzato  $u_{nk}$  è definito come:

$$u_{nk} = E[(X - \mu_X)^n (Y - \mu_Y)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^n (y - \mu_Y)^k f_{XY}(x, y) dx dy,$$

dove  $\mu_X$  e  $\mu_Y$  sono le medie di  $X$  e  $Y$ .

Il secondo momento centrale  $u_{11} = \text{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$  riveste notevole importanza ed è chiamato *covarianza*. Risulta in particolare:

$$\text{Var}[X] = \text{Cov}[X, X] \quad \text{e} \quad \text{Cov}[X, Y] = E[XY] - \mu_X\mu_Y.$$

Per problemi di scala legati alla covarianza (stessa natura della varianza), si preferisce utilizzare il valore normalizzato noto come *coefficiente di correlazione* tra  $X$  e  $Y$  e definito da:

$$\rho[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}}, \quad \text{dove} \quad |\rho[X, Y]| \leq 1.$$

Inoltre, se le variabili sono indipendenti o scorrelate allora  $\rho[X, Y] = \text{Cov}[X, Y] = 0$ , nel senso che  $E[XY] = \mu_X\mu_Y$ .

# Bibliografia

- [1] J. D. Gibson. *Principles of Digital and Analog Communications*. Macmillan, second edition, 1993.
- [2] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 1975.
- [3] A. V. Oppenheim and A. S. Willsky. *Signals & Systems*. Prentice Hall, second edition, 1997.
- [4] C. L. Phillips, J. M. Parr, and E. A. Riskin. *Signals, Systems, and Transforms*. Prentice Hall, third edition, 2003.
- [5] J. G. Proakis and D. G. Manolakis. *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications*. Pearson Prentice Hall, fourth edition, 2007.
- [6] S. V. Vaseghi. *Advanced Signal Processing and Digital Noise Reduction*. Wiley & Teubner, 1996.